Interrogation de mathématiques n°2

Exercice 1 – 3 points

Déterminer les limites suivantes en expliquant la démarche :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+1}{9x^2+1}}$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

3. Les limites de *f* en 1, avec $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-1}$.

Exercice 2 – 2 points

Dériver les fonctions suivantes en expliquant la démarche :

1. $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$

2. $f(x) = \cos\left(3x^2+1\right)$

Exercice 3 – 6 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}.$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel *n*, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n-1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n-1$$

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n-1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

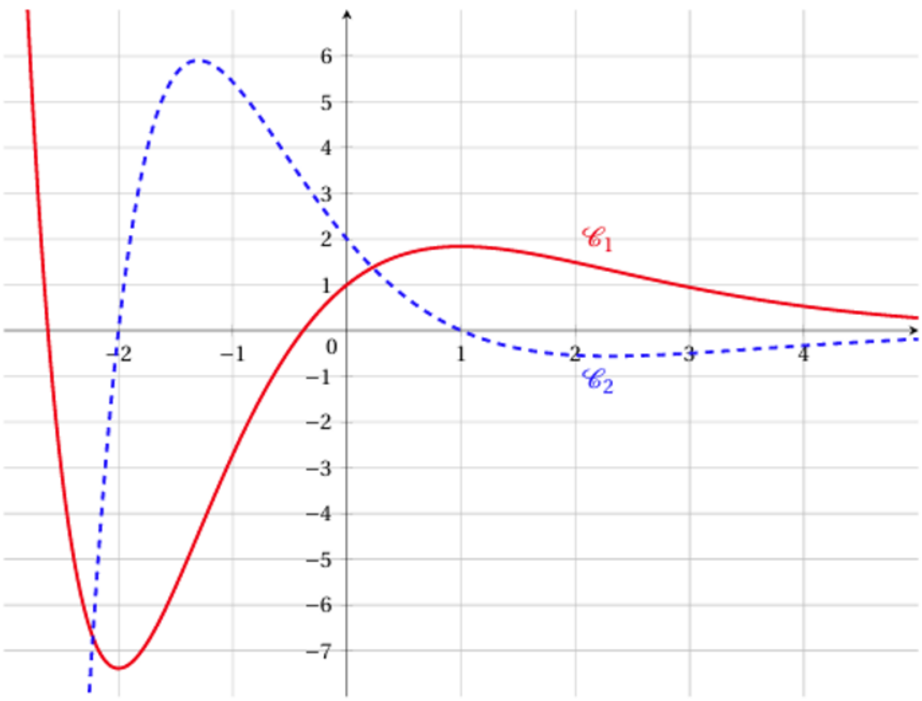
a. Interpréter les valeurs *n* et *u* renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de *n* pour $p = 0,001$.

Exercice 4 – 3 points

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes C_1 et C_2, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On le note g et g'.
On précise également que :

- La courbe C_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;1)$.
- La courbe C_2 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2;0)$ et $(1;0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

3. Construire le tableau de variations complet de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – 6 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 9x - 2$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2. Construire le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$. On donnera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sans justification et les images.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.

4. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

5. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(x^2 + 3\right)^2}$.

3. A l'aide d'un tableau de signes déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha^2 - 4}{6\alpha - 5}$.

6. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

7. Existe-t-il des tangentes à C_f parallèles à la droite d'équation $y = x$?