BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION JANVIER 26

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU LUNDI 5 JANVIER 2026

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de page 1/7 à page 1/7

Exercice 1 **5 points**

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil.
On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
  u = 1 000
  for i in range(n) :
    u = 0,9*u + 250
  return u
```

4. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n*, $u_n \leq 2500$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel *n*.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.

b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer v_n en fonction de *n* et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200. Déterminer cette année.

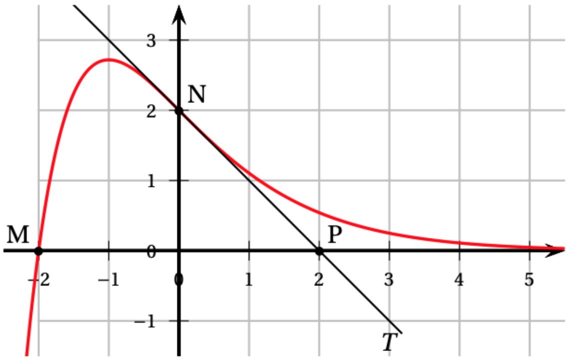
Exercice 2 **5 points**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative C_f de la fonction f ;
- la tangente T à C_f en son point $N(0;2)$;
- le point $M(-2;0)$ appartenant à C_f et $P(2;0)$ appartenant à la tangente .

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.



Partie A : Etude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

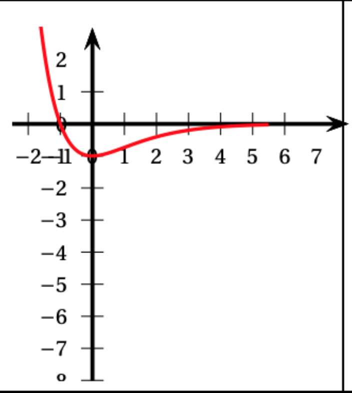
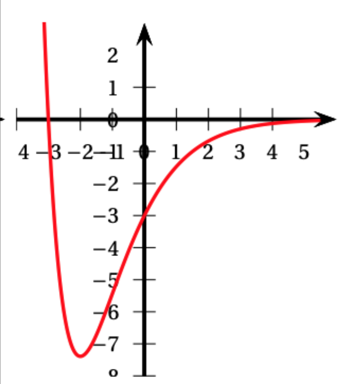
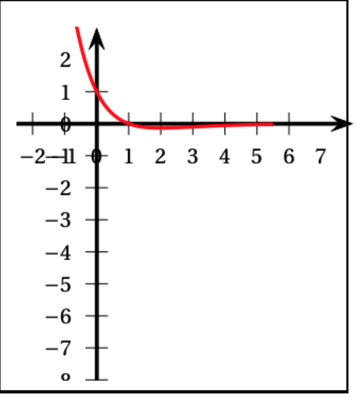
1. a. Donner $f(0)$.

b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut avoir pour dérivée la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction *f* est de la forme

$$f(x) = (ax+b)e^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de *a*.

3. Déterminer une expression algébrique de *f*. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de *f*.
Justifier.

3. a. Étudier la convexité de *f*.
b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f.

Exercice 3 **5 points**

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

c. Calculer $P(X \leq 1)$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

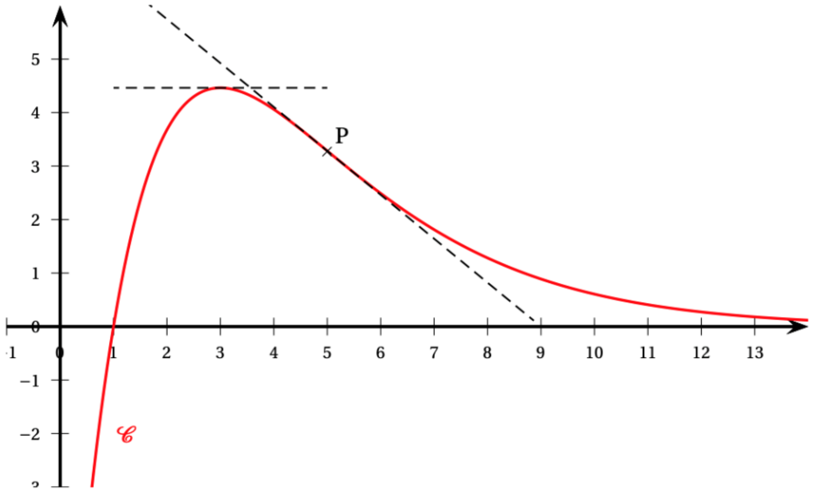
Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes. Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La courbe *C* ci-dessous représente une fonction *f* définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que :

- Le maximum de la fonction *f* est atteint au point d'abscisse 3 ;
- Le point *P* d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe *C*.



a. pour tout $x \in]0;5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

b. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

c. pour tout $x \in]0;5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

d. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

2. On considère la fonction *g* définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{a}{b+e^{-t}}$ où *a* et *b* sont deux nombres réels.

On sait que $g(0)=2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=3$.

Les valeurs de *a* et *b* sont :

a. $a=2$ et $b=3$

b. $a=4$ et $b=\dfrac{4}{3}$

c. $a=4$ et $b=1$

d. $a=6$ et $b=2$

3. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10}$

b. $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

c. $\left(\frac{3}{10}\right)^2$

d. $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

4. On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{100}$.

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{2n+1}$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2

b. géométrique de raison e

c. géométrique de raison e^2

d. convergente vers e