

Correction interros

exo 1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (3x+1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (croissance comparée)

Par somme de limites on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$f(x) = x(3 + \frac{1}{x} - 2 \ln x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{1}{x} - 2 \ln x) = -\infty$

Par produit de limites on a:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. a $f'(x) = 3 - 2 \ln x + \frac{1}{x}(-2x)$
 $= 3 - 2 \ln x - 2$
 $= 1 - 2 \ln x$

b. Posons $f'(x) \geq 0$
 $1 - 2 \ln x \geq 0$
 $-2 \ln x \geq -1$
 $\ln x \leq \frac{1}{2}$
 $x \leq e^{1/2}$
 $\rightarrow \sqrt{e}$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		1	$-\infty$

3a. sur $]0; \sqrt{e}]$ $f(x) > 1$ donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

* f continue et strictement décroissante sur $[e^{1/2}; +\infty[$

$f([e^{1/2}; +\infty[) =]-\infty; 2e^{1/2} + 1[$

et $0 \in]-\infty; 2e^{1/2} + 1[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{1/2}; +\infty[$.

cel: $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
f(x)		+	-

4. F est une primitive de f.

Donc $F'(x) = f(x)$ et comme sur $[e^{1/2}; \alpha]$ $f(x) \geq 0$ et sur $[\alpha; +\infty[$ $f(x) \leq 0$, on ne peut pas affirmer que F est décroissante sur $[e^{1/2}; +\infty[$.

So $f''(x) = -\frac{2}{x} < 0$ car $x > 0$

Donc f est concave sur $]0; +\infty[$.

b. T: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f(1) = 3 + 1 - 2 \ln 1 = 4$$

$$f'(1) = 1 - 2 \ln 1 = 1$$

Donc T: $y = x - 1 + 4$
 $y = x + 3$

c. Comme f est concave sur $]0; +\infty[$, cf est en dessous de ses tangentes, en particulier T.

On a $\forall x > 0$:

$$f(x) \leq x + 3$$

$$3x + 1 - 2x \ln x \leq x + 3$$

$$-2x \ln x \leq -2x + 2$$

$$\ln x \geq \frac{-2x + 2}{-2x} \quad \text{car } -2x < 0$$

$$\ln x \geq \frac{-2x}{-2x} + \frac{2}{-2x}$$

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

exo 2

1a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x}) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ } Par composition de limites on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + e^{-x} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = 0$ } Par composition de limites on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

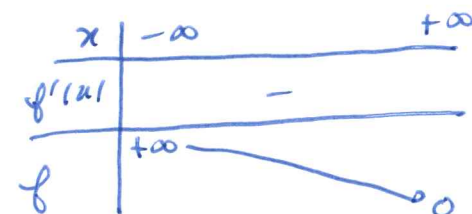
cf admet une asymptote horizontale d'eq. $y = 0$ en $+\infty$.

c. $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$
 $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(-1)}{e^{-x}(e^x + 1)} = \frac{-1}{e^x + 1}$

d. Comme $e^x > 0$ alors $e^x + 1 > 0$
 $-1 < 0$

Donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

On a:



2. a. $T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$f(0) = \ln(1+e^0) = \ln 2$$

$$f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = -\frac{1}{2}$$

Donc $T_0: y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$

b. $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x} \quad \left[\left(\frac{1}{\sigma} \right)' = -\frac{\sigma'}{\sigma^2} \right] \leftarrow \text{par informal}$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \text{car } e^x > 0$$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. f convexe donc f est au dessus des tangentes en particulier T_0 .

on a $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$

3. a $f(x) - f(-x) = \ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^x)$
 $= \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^x}\right)$

$$= \ln\left(e^{-x} \cdot \frac{e^x + 1}{1+e^x}\right)$$

$$= \ln(e^{-x}) = -x$$

b. 2 droites sont // $\Leftrightarrow$ les coefficients directeurs sont égaux.

$T_0: m_0 = -\frac{1}{2}$

$(\pi_a N_a): m_a = \frac{y_{Na} - y_{Ma}}{x_{Na} - x_{Ma}}$

$$= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}$$

$$= \frac{-a}{2a}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$= m_0$$

Donc $T_0 \parallel (\pi_a N_a)$