Interrogation de mathématiques n°5

Exercice 1 – 10 points

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3x+1-2x\ln(x).$$

On admet que la fonction *f* est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.

2. a. Démontrer que pour tout réel *x* strictement positif : $f'(x)=1-2\ln(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On notera α cette solution.

b. En déduire le signe de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On la note *F*.

Peut-on affirmer que la fonction *F* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$?

Justifier.

5. a. Étudier la convexité de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

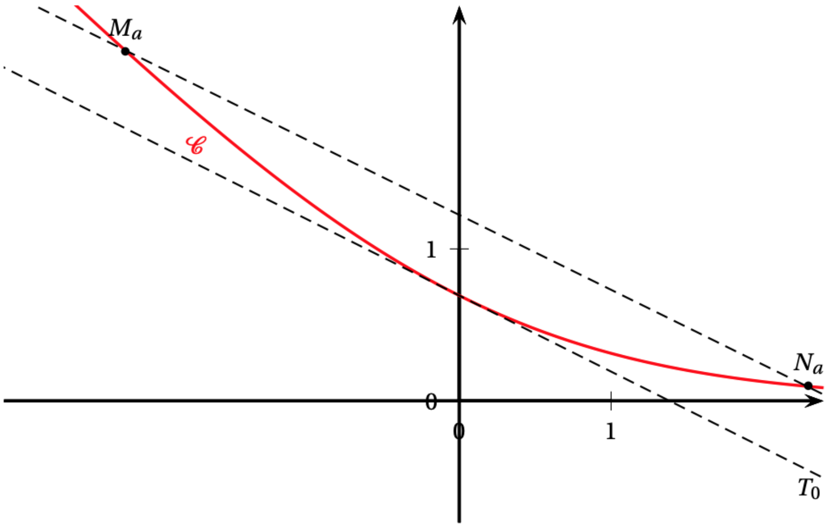
Quelle est la position de la courbe C_f par rapport à ses tangentes ?

b. Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

c. Déduire des questions **5. a** et **5. b** que pour tout réel *x* strictement positif : $\ln(x)\geq 1-\dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 – 10 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
La courbe C est tracé ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{-1}{1+e^{x}}$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.
a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}x+\ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a.
On a donc : $M_a\left(-a;f(-a)\right)$ et $N_a\left(a;f(a)\right)$.
a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)-f(-x)=-x$.

b. En déduire que les droites T_0 et $\left(M_aN_a\right)$ sont parallèles.