

Exercice 1 – 10 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): y' + 0,48y = \frac{1}{250}$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.

Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture. À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que, pour tout t

appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1): y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

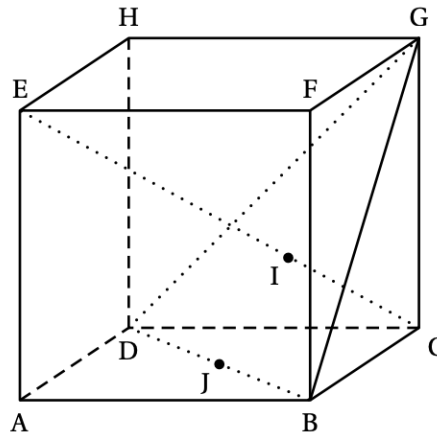
On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice 2 – 10 points

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC) .

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E , C , G .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD) .
4.
 - a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est : $x + y - z - 1 = 0$.
 - b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
 - c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
5.
 - a. Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.
 - b. Calculer l'aire du triangle BDG . On pourra utiliser le point J , milieu du segment $[BD]$.
6. Justifier que le volume du tétraèdre $EGBD$ est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.