Correction du BB2

exo 1

(A)

1. augmentat° de 60% $\rightarrow \times\left(1+\frac{60}{100}\right) \Rightarrow \times 1,6$.

Donc (u_n) est géometrique de raison 1,6 et de 1er terme $u_0 = 0,1$ (millions)

Donc $u_n = 0,1 \times 1,6^n$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,6^n = +\infty$ car $1,6 > 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $0,1 > 0$

3. $u_n > 0,4$

$0,1 \times 1,6^n > 0,4$

$1,6^n > 4$

$\ln(1,6)^n > \ln 4$

$n \cdot \ln(1,6) > \ln 4$

$n > \dfrac{\ln 4}{\ln 1,6}$ car $\ln(1,6) > 0$

$n > 2,95$

Donc à partir de $n = 3$.

4. $u_3 > 0,4$ Donc le nombre d'insectes dépasse 400 000 à partir du 3e mois. Donc le milieu n'est pas préservé

(B)

1. $v_1 = 1,6 v_0 - 1,6 \times v_0^2$

$= 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2$

$= 0,144.$

Donc le nombre d'insectes au bout d'un mois est de 144000.

2.a. $f(x) = x$

$1,6x - 1,6x^2 = x$

$0,6x - 1,6x^2 = 0$

$x(0,6 - 1,6x) = 0$

soit $x = 0$

soit $0,6 - 1,6x = 0$

$x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8} = 0,375.$

b. $f'(x) = 1,6 - 3,2x$

$f'(x) = 0 \iff 1,6 - 3,2x = 0$

$\iff x = \frac{1,6}{3,2} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$1,6-3,2x$		+	0	−	

Donc on a :

x	0		$1/2$
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	$0,4$

Donc f croissante sur $[0; 1/2]$

3a (I) $v_0 = 0{,}1$

$v_1 = 0{,}375$ Dmc on a $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$

vraie pour $n=0$

(H) Supposons qu'il existe un entier n tq

$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Mq $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$

On a $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(1/2)$ car $f \nearrow$ sur $[0; \frac{1}{2}]$

Dmc $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0{,}4 < \frac{1}{2}$

(C) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

b. $v_n \leq \frac{1}{2}$ Dmc (v_n) majorée

$v_n \leq v_{n+1}$ Dmc $(v_n) \nearrow$

Dmc (v_n) converge.

c. ℓ est la solution de $f(x) = x$.

(v_n) est $\nearrow$ et tend vers ℓ

Dmc $v_n \leq \ell$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dmc $v_0 = 0{,}1 \leq \ell$

Dmc $\ell \neq 0$ et dmc $\ell = 0{,}375$

Dmc le milieu sera préservé.

4.
a. la fonction seuil(a) donne le plus petit entier n tq $v_n \geq a$.

or on a vu que $v_n \leq 0{,}375$.

Dmc il n'y a pas de valeur de n tq $v_n \geq 0{,}4$.

La fonction seuil (0,4) ne donne pas de réponse

b. la fonction seuil (0,35) donne $n = 6$

Autrement dit à partir du 6e mois le nombre d'insectes dépassera 350000 individus.

exo 2

(A) 1. $f'(1) = -1$

2. $f'(x) = 0$ pour 2 pts de la courbe car il y a 2 tangentes horizontales.

3. la fonction f est concave sur $]0;1[$ dmc $f''(0{,}2) < 0$

(B) 1. $2X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Delta = -7 < 0$ Dmc pas de solution.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ impossible car $x \in]0; +\infty[$.

ou $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ en posant $X = \ln x$

on a $2X^2 - 3X + 2 = 0$ pas de solution.

Dmc $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. $f(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$

$= x\ln x\left[2\ln x - 3 + \frac{2}{\ln x}\right]$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\ln x} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\ln x - 3 + \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$

Par produit de limites on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3 a $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$

$f''(x) = 2\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x + \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$

b. Comme $\frac{1}{x} > 0$ car $x \in]0;+\infty[$ alors $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$.

Posons $4\ln x + 1 \geqslant 0$

$\ln x \geqslant -1$

$\ln x \geqslant -\frac{1}{4}$

$x \geqslant e^{-1/4}$

Donc on a :

x	0		$e^{-1/4}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	concave		convexe	

le pt d'inflexion a pour abscisse $e^{-1/4}$.

c. Comme $-\frac{1}{4} < 0$

alors $e^{-1/4} < e^0$

$e^{-1/4} < 1$

Comme f est convexe sur $[e^{-1/4};+\infty[$ donc sur $[1;+\infty[$, alors f est au dessus de T_B sur $]1;+\infty[$, $x_B = e > 1$.

C 1 $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

avec $f(e) = e$ et $f'(e) = 2$

Donc $y = 2(x-e) + e$

T_B : $y = 2x - e$

2. posons $u = \ln x$ $\quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

Donc $\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$

$= \frac{e^2\ln e}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{e^2+1}{4}$

3. $A = \int_1^e (f(x) - 2x + e)\,dx.$

$= \int_1^e (2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + \cancel{2x} - \cancel{2x} + e)\,dx.$

$= 2\int_1^e x(\ln x)^2 dx - 3\int_1^e x\ln x\,dx + \int_1^e e\,dx.$

$= 2\times \frac{e^2-1}{4} - 3\,\frac{e^2+1}{4} + [ex]_1^e$

$= \frac{2e^2-2-3e^2-3}{4} + e^2 - e$

$= \frac{3e^2-4e-5}{4}$ ua.

---

exo 3

1. $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $I(\frac{1}{2};0;0)$ $J(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

2a (AJ) passe par $A(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{AJ}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ donc (AJ): $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

b. (IG) passe par $I(\frac{1}{2};0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{IG}(\frac{1}{2};1;1)$ Donc (IG): $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

c. Il faut résoudre :

$\begin{cases} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}t = k \\ \frac{1}{2}t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ t = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 1 + k \\ t = 2k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 1 \\ t = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1/3 \\ t = 2/3 \end{cases}$

Posons $t = 2/3$ dans la représentat° de (AJ) :

$\begin{cases} x = 2/3 \\ y = 1/3 \\ z = 1/3 \end{cases}$ $S(2/3; 1/3; 1/3)$ est donc le pt d'intersection de (AJ) et (IG)

3a $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{AB} = 0\times1 - 1\times0 + 1\times0 = 0$ $\vec{n}.\vec{AG} = 0\times1 - 1\times1 + 1\times1 = 0$

Donc $\vec{n}$ est $\perp$ à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABG). C'est donc un vecteur normal de ce plan.

b. (ABG) : $ax + by + cz + d = 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ vect. normal

on a : $-y + z + d = 0$

or $A(0;0;0) \in (ABG)$ donc $d = 0$ ccl: (ABG): $-y + z = 0$

c. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1+t \\ -y+z=0 \end{cases}$ Donc on a : $-(-t)+1+t=0$

$$2t+1=0$$

$$t=-\frac{1}{2}$$

Donc $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1/2 \\ z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$ Donc (d) coupe (ABG) en $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

d. $AL = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BL = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$GL = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc L est equidistant des pts A, B et G.

4 $\vec{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BA}\cdot\vec{BG} = -1\times0+0\times1+0\times1$

$$=0$$

Donc ABG est un triangle rectangle en B.

5a. le centre du cercle circonscrit au triangle ABG est L

le centre de gravité du triangle ABG est S

l'orthocentre du triangle ABG est B.

b. $\vec{BL}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\vec{BS}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Donc $\vec{BL}=\frac{3}{2}\vec{BS}$

$\vec{BL}$ et $\vec{BS}$ sont colinéaires.

Donc les pts B, L et S sont alignés.

Exo 4

1 $P(C)=0{,}02$ $P(V)=0{,}9$ $P_C(V)=0{,}62$

2a. $P(C\cap V)=P_C(V)\times P(C)$

$$=0{,}62\times0{,}02$$

$$=0{,}0124$$

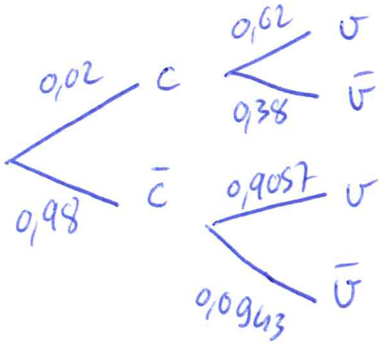
b. $P(V)=P(C\cap V)+P(\bar{C}\cap V)$

Donc $P(\bar{C}\cap V)=P(V)-P(C\cap V)$

$$=0{,}9-0{,}0124$$

$$=0{,}8876$$

3. $P_{\bar{C}}(V) = \dfrac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \dfrac{0,8876}{1 - 0,02} = 0,9057$.



4. $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)} = \dfrac{0,0124}{0,9} \simeq 0,0138$

cela signifie que 1,38% des personnes vaccinées ont été contaminées.

5. a. $P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 0,0943$ $\quad P_{\bar{C}}(V) = 0,9057$

so $P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 0,943$ Donc $\boxed{\text{Faux}}$

b. $P_V(C) = 0,0138$ soit 1,38% des personnes vaccinées ont été contaminées.
Soit 98,62% de ces personnes n'ont pas été contaminées $\boxed{\text{vraie}}$

6a Il y a répétition de façon identique et indépendante d'une épreuve ayant 2 issues :
* contaminée (succès) $\quad p = 0,02$
* non contaminée (echec)

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$.

b. $P(X=4) = \binom{20}{4} 0,02^4 \, 0,98^{16}$
$\simeq 0,0006$

---

exo 5

1 vraie $\quad \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. comme $\dfrac{1}{2} \leq u_n$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

2 Fausse. sur $[-1;3]$ f' n'est pas que croissante

Donc f n'est pas que convexe.

3 vraie

tous les codes $\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

$10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 3 \quad 2 \quad = 60\,000$

codes sans 0 : $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 \times 2 = 39\,366$

Donc il y a $60000 - 39\,366 = 20\,634$ codes

avec au moins un 0.

4 Fausse ~~vraie~~

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x$$

$$= \ln x + 1$$

Donc $x f' - f = x(\ln x + 1) - x \ln x$

$$= x \ln x + x - x \ln x$$

$$= x.$$