BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION AVRIL 26

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU LUNDI 27 AVRIL 2026

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de page 1/8 à page 1/8

Exercice 1 **4 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois. En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel *n*, un modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de *n* mois.
On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel *n* : $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel *n* à partir duquel $u_n > 0{,}4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0{,}1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6{v_n}^2,$$

où, pour tout entier naturel *n*, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de *n* mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, par
$$f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2.$$
   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   b. Montrer que la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.
3.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $0 \le v_n \le v_{n+1} \le \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note l la valeur de sa limite. On admet que l est solution de l'équation $f(x)=x$.

c. Déterminer la valeur de l.

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

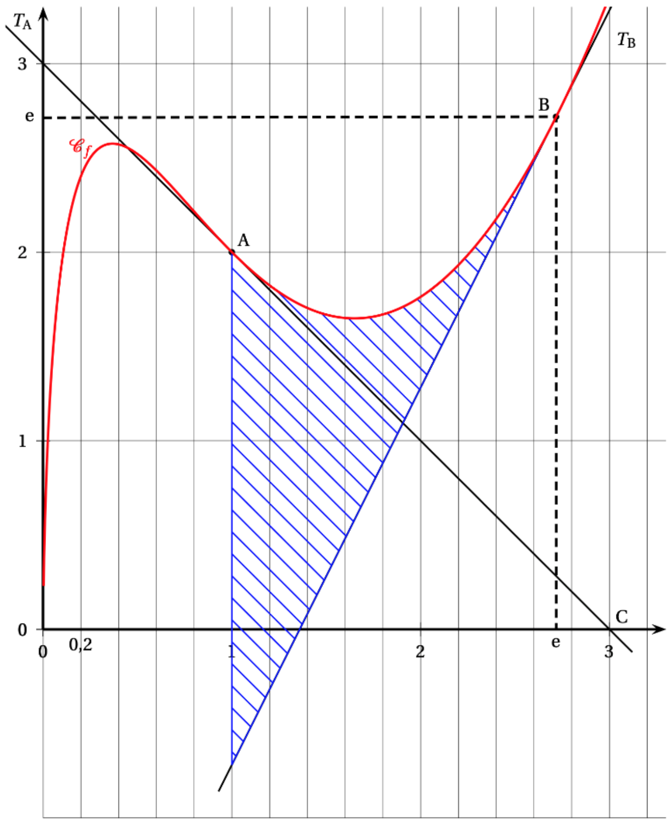
Exercice 2 — 4 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée C_f sur l'intervalle $]0;3]$;
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1;2)$;
- la droite T_B tangente à C_f au point $B(e;e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x)=0$ admet-elle dans l'intervalle $]0;3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction *f*

On admet dans cette partie que la fonction *f* est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=x\left[2(\ln x)^2-3\ln x+2\right]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2-3X+2=0$. En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de *f* en $+\infty$. On admettra que la limite de *f* en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$.

   a. Montrer que pour tout *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}(4\ln x+1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$.
3. On note *A* l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

   On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2-1}{4}$.

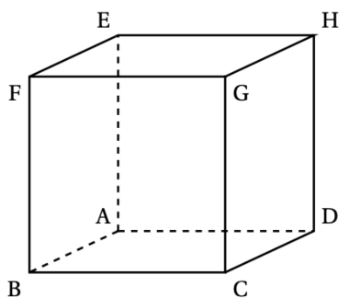
   En déduire la valeur exacte de *A* en unité d'aire.

Exercice 3 **4 points**

« Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :

- le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).
- le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.
- l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle ».

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.
On considère un cube *ABCDEFGH* de côté une unité.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
On note *I* le milieu du segment $[AB]$ et *J* le milieu du segment $[BG]$.



1. Donner sans justification les coordonnées des points *A*, *B*, *G*, *I* et *J*.

2.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(0;-1;1)$ est normal au plan (ABG).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5.

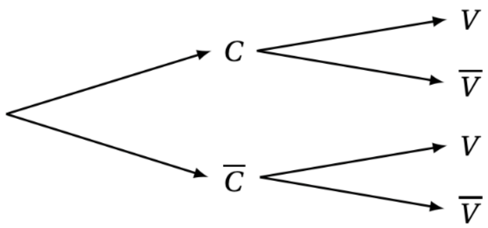
a. Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

Exercice 4 **4 points**

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.
Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus.
On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées.
On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :
C : « la personne a été contaminée »
V : « la personne a été vaccinée ».
Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.
2.
   a. Calculer $P(C \cap V)$.
   b. En déduire $P(\overline{C} \cap V)$.
3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
   a. « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
   b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population. La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.
   On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.
   b. Calculer, <u>en rappelant la formule</u>, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

Exercice 5 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

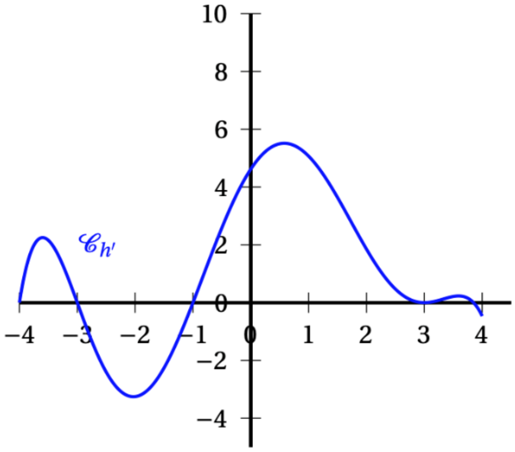
1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

   pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

Affirmation 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$.

   La représentation graphique $C_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



   Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1;3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

   Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

   Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = 0$$