# 01 : Suites et récurrence

## I. Le raisonnement par récurrence

**Exemple**

On considère une file illimitée de dominos placés les uns devant les autres. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.
Si le premier domino tombe, on est donc assuré que tous les dominos de la file tombent.

**Définition**

On dit qu'une propriété est héréditaire à partir d'un certain rang :
Si la propriété est vraie pour un entier *n*, alors elle est vraie pour l'entier $n+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino *n* tombe alors le domino suivant $n+1$ tombe également.

**Principe de récurrence**

Si la propriété *P* est : - vraie au rang $n_0$ (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang $n_0$ (Hérédité),

Alors la propriété *P* est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

**Remarques**

- Dans l'exemple, le 1er domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
- L'hérédité est vérifiée. On en déduit que tous les dominos tombent.
- Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration "classique" est difficile.

**Exemple 1**

On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.
Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par 3.

**Réponse** : Il faut montrer que pour tout entier $n$, $u_n \geq 3$.

**Initialisation**
$u_0 = 5 > 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$

**Hérédité**
Supposons qu'il existe un entier naturel $n$ tel que $u_n \geq 3$ (hypothèse de récurrence)
Montrons que $u_{n+1} \geq 3$.
On a $u_n \geq 3$
Donc $u_n + 6 \geq 9$ (on ne change pas l'ordre quand on additionne)
De plus $\sqrt{u_n - 6} \geq \sqrt{9}$ (on ne change pas l'ordre car la fonction racine est croissante)
D'où $u_{n+1} \geq 3$

**Conclusion**
Pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 3$.

## Exemple 2

On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 2u_n - 6$.
Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Réponse :** Il faut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$

**Initialisation**
$u_0 = 2$ et $u_1 = 2u_0 - 6 = 2 \times 2 - 6 = -2$
Donc $u_1 \leq u_0$. La propriété est vraie pour $n = 0$

**Hérédité**
Supposons qu'il existe un entier naturel $n$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$ (hypothèse de récurrence)
Montrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
On a $u_{n+1} \leq u_n$
Donc $2u_{n+1} \leq 2u_n$ (on ne change pas l'ordre quand on multiplie par $2 > 0$)
De plus $2u_{n+1} - 6 \leq 2u_n - 6$ (on ne change pas l'ordre quand on soustrait)
D'où $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

**Conclusion**
Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} \leq u_n$.

## Exemple 3

Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

**Réponse**

**Initialisation**

Pour $n=1$, $\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

Donc la propriété est vraie pour $n=1$

**Hérédité**

Supposons qu'il existe un entier naturel *n* tel que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que $1+2+3+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Donc $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ on ajoute le terme $(n+1)$

Donc $1+2+3+...+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2\times(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

**Conclusion**

Pour tout entier naturel *n*, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

## Exercice 1

Montrer par récurrence que :

1. $7^n+2$ est divisible par 3
2. $6^n-1$ est un multiple de 5
3. $2^n\geq n+1$.
4. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$
5. $(1+x)^n\geq 1+xn$, avec *x* un réel positif (inégalité de Bernoulli).

## Exercice 2

$(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout nombre entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

**1.** Démontrer par récurrence que tout entier naturel $n$, $u_n \geq 2$.

**2.** En déduire que $(u_n)$ est décroissante.

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.