01 : Suites et récurrence

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
2. Déterminer cette conjecture par récurrence.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Déterminer par récurrence que $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq 4$.
3. En déduire que (u_n) est croissante.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier n , $2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Exercice 5

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 6

On pose $\Sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

1. Calculer Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 et Σ_4 .

2. Exprimer Σ_{n+1} en fonction de Σ_n .

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Calculer alors Σ_{11} .

Exercice 7

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n!$ (et on lit factorielle n) le nombre tel que :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 8

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{3}{u_n}$ (on a donc $v_n > 0$ pour tout entier n).

a. Démontre que (v_n) est une suite arithmétique.

b. En déduire une expression de v_n puis u_n en fonction de n .

c. Démontrer par une autre méthode le résultat de la question 1. b.