

I. Limite d'une suite

1. Limite infinie d'une suite

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

En effet les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition

La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; a[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. Algorithme de seuil

Soit (u_n) une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

Le but de l'algorithme est de déterminer le rang à partir duquel u_n est supérieur à A .

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 4u_n$.

Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Algorithme de seuil en langage naturel :
Pour $A = 10000$, on obtient $n = 7$.

Langage naturel
Définir fonction seuil(A)
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 2$
Tant que $u < A$
$n \leftarrow n + 1$
$u \leftarrow 4u$
Fin Tant que
Afficher n

Avec la TI Nspire CX CAS :

Avec Python :

```

Python
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n=n+1
        u=4*u
    return(n)
    
```

3. Limite finie : suite convergente

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

En effet les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Intuitivement : dire que (u_n) tend vers L (ou a pour limite L) quand n tend vers $+\infty$, signifie que lorsque n est de plus en plus grand, les nombres u_n se cumulent autour de L .

Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

On dit que la suite (u_n) est convergente.

Remarque : Une suite non convergente est dite divergente.

II. Limites de suites de référence

Propriété			
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty, p \in \mathbb{N}^*.$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0, p \in \mathbb{N}^*.$

III. Opérations sur les limites

Soit deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) admettant une limite finie ou infinie, et soit l et m deux nombres réels.

1. Limites d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
m	$l + m$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

2. Limites d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m, m \neq 0$	$l \times m$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

3. Limites d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$l, l \neq 0$	0	$\pm\infty$
$m, m \neq 0$	$\frac{l}{m}$	0	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	FI

Remarques

- Le signe du Résultat s'obtient à l'aide de la règle des signes.
- Il y a 4 formes indéterminées principales : $\infty - \infty$; $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

Cela ne signifie pas que la limite est impossible à trouver mais que le résultat n'est pas immédiat. Il faut modifier l'expression afin de déterminer cette limite.

Exemple 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n + 1)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n + 1 = -\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Levons l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré.

$$n^2 - 3n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n + 1) = +\infty$

Exemple 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2\sqrt{n})$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Levons l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré.

$$n - 2\sqrt{n} = n \left(1 - \frac{2\sqrt{n}}{n} \right) = n \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1$ donc par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2\sqrt{n}) = +\infty$

Exemple 3 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 + 1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 + 1) = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2n^2 + n}{3n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(2 + \frac{n}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n^2} \right) = 3$

Donc par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 + 1} = \frac{2}{3}$

Exemple 4 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{5n + 2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n + 2) = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

$$\frac{n^2 + n}{5n + 2} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)}{n \left(5 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{n^2}{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = n \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right) = 5$ donc par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{5}$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} \right) = +\infty$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{5n + 2} = +\infty$

Exemple 5 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Levons l'indétermination en utilisant l'expression conjuguée.

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

Or par somme de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + n + 2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - n)$$



Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soit l un réel et (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant les deux conditions :

- À partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

Alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Application 2

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n} \right)$



Théorème 2

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème 3

- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Soit un réel a .

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang p , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a; +\infty[$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers l .

Si la fonction associée f est continue en l , alors la limite l est solution de l'équation $f(x) = x$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 4$.

[illegible]

2. En déduire que (u_n) converge.

3. Déterminer alors sa limite.

5. Limite d'une suite géométrique

Théorème

Soit $q \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants :

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$;
- Si $q < -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Alors :

$q = 1 + x$, avec $x > 0$.

On sait alors, grâce à l'inégalité de Bernoulli que, pour tout entier n :

Pour tout $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour $x > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx = +\infty$

On a donc :

- à partir du rang 0, $(1+x)^n \geq 1+nx$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+nx) = +\infty$

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)^n = +\infty$ autrement dit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exercice 3

Étudier limite à l'infini de $3^n - 4^n$.

[illegible]

Exercice 4 : Asie sujet 2 – Juin 25 (extrait)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 20 rows, creating a total of 400 squares. The lines are thin and dark gray, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

