02 : Limites de suites

Exercice 1

Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = -n^3 + 2n^2$ **2.** $v_n = \dfrac{-n^2+1}{2n^2+1}$ **3.** $w_n = \dfrac{n^2-1}{n^3+1}$

Exercice 2

Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$ **2.** $v_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$ **3.** $w_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

Exercice 3

Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n}$ **2.** $v_n = \dfrac{(-1)^n - 5}{n+1}$ **3.** $w_n = n - 2\sin(n)$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$.

On pose (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison -3.

2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de *n*.

3. Déterminer Ia limite de Ia suite u_n.

Exercice 5 : Amérique du nord J1 – Mai 25

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$. On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel *n*, par : $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Exercice 6 : Amérique du nord J2 secours – Juin 25

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel *n*, exprimer w_n en fonction de *n*.

4. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $l = l - \frac{1}{4}l$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).