03 : Dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1. Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x)=k$ (Constante)	$f'(x)=0$
$f(x)=mx+p$	$f'(x)=m$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ $(n\geq 1)$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{-x}$	$f'(x)=-e^{-x}$

2. Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$ (k constante)	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+v'u$
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Propriété : Equation de la tangente à une courbe

L'équation réduite de la tangente au point A d'abscisse a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Théorème

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle *I*.

- Si $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur *I*.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur *I*.

Application 1

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de variation de *f* sur $[0;10]$

II. Dérivée d'une fonction composée

Exemple

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x+5}$.

On peut décomposer la fonction *f* en deux fonctions *u* et *v* telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x+5 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x+5}$$

Avec $u(x) = x+5$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction *f* est la composée de *u* par *v* et on note :

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$$

Définition

On appelle fonction composée des fonctions *u* par *v* la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

Exemple

Soit 2 fonctions $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 + 4) = \sqrt{x^2 + 4}$
- $u \circ v(x) = u(v(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 4 = x + 4$

Application 2

1. On considère les fonctions *u* et *v* telles que $u(x) = -x + 1$ et $v(x) = \dfrac{3}{x - 1}$.

Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ et fonction de *x*.

2. Faire de même avec $u(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ et $v(x) = x^2 - 1$.

Remarque : En général $g \circ u \neq u \circ g$

Propriété : Dérivation d'une fonction composée

Soit u et v deux fonctions dérivables de dérivées respectives u' et v'.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Exemple

On veut dériver la fonction $f(x) = e^{x^2+1}$.

On a $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$.

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$.

Donc $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2xe^{x^2+1}$

Application 3

Déterminer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ puis celle de $g(x) = e^{-x^2+3x-1}$.

Autres formules

Fonction	Dérivée
u^2	$2u'u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
e^u	$u'e^u$

Application 4

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = e^{x^2}$ $\quad g(x) = \left(x^2+1\right)^3$ $\quad h(x) = \cos(2x+1)$ $\quad i(x) = \sin x\left(x^2+1\right)$