04 : Limites de fonctions

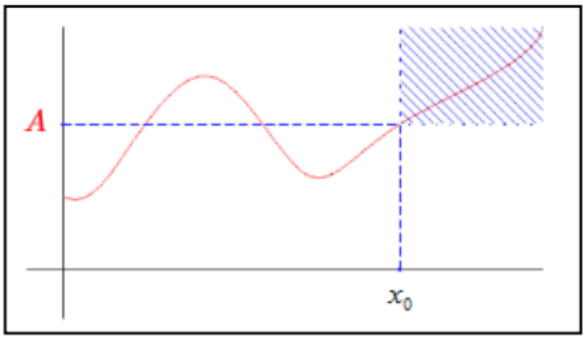
I. Limites d'une fonction en l'infini

1. Limite infinie

Définition

On dit que la limite de *f* en $+\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que *x* est assez grand.

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



Quelle que soit la valeur de *A* choisie, $f(x)$ dépassera toujours *A* pour *x* assez grand.

Remarque

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Propriété : Limites de référence

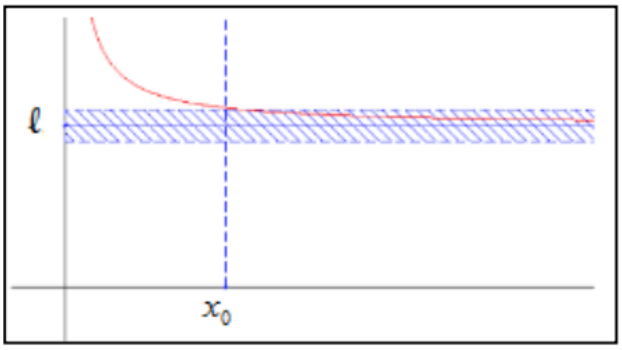
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1}=-\infty$

2. Limite finie et asymptote horizontale

Définition

- On dit que la limite de *f* a pour limite *L* lorsque *x* tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant *L* contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que *x* est assez grand.
  On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.
- On dit alors que la droite d'équation $y=L$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$, où C_f est la courbe représentative de la fonction *f*.



Remarque

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Propriété : Limites de référence

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

II. Limites d'une fonction en un nombre réel

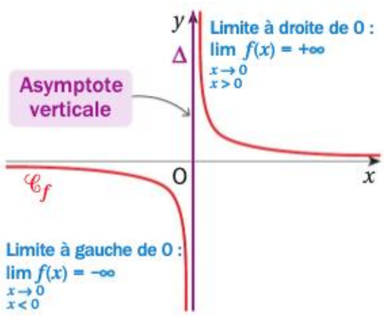
1. Limite infinie et asymptote verticale

Définition

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
  On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- On dit alors que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à C_f.

Exemple

Concernant la fonction inverse : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$



Sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées ($x=0$) comme asymptote verticale.

III. Opérations sur les limites

a peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1. Limite d'une somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2. Limite d'un produit

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$L\times L'$	∞	∞	FI

On applique la règle des signes pour déterminer le signe du produit.

Exemple

$\lim_{x\to+\infty} (2-x)(1-x^2)=+\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} (2-x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (1-x^2)=-\infty$

3. Limite d'un quotient

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	FI	FI

On applique la règle des signes pour déterminer le signe du quotient.

Remarque

Il y a 4 formes indéterminées qui sont : $\infty-\infty$ $\quad\infty\times 0$ $\quad\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad\dfrac{0}{0}$

Application 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right)$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 5}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 2}{3 - \dfrac{1}{x}}$

4. $f(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 - 1}$ limites en 1.

Application 2

Soit *f* fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{5-x}$.

1. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter le résultat.
2. Déterminer la limite de *f* en 5 à droite et à gauche. Interpréter le résultat.
3. Dresser le tableau complet de variation de *f*.

IV. Limites par comparaison

a et L sont deux réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que, pour x proche de a, on a $g(x) \leq f(x)$.

- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Application 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \leq x^3 - \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Peut-on déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions telles que, pour x proche de a, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Exemple

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

On a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et comme $x > 0$, alors $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Application 4

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f(x) = x + \cos x$.

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $g(x) = \cos x . e^{-x}$.

3. Déterminer les limites en $-\infty$ de la fonction $h(x)=\dfrac{2x^2+\sin x}{x-1}$.

Propriété : Fonction exponentielle

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

<u>Démonstration</u>

Posons $f(x)=e^x-x$.

$f'(x)=e^x-1$

Posons $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc $f(x)\geq 1>0$ cad $e^x>x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Avec un changement de variable on démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

Propriété : Croissances comparées

Pour tout entier naturel *n*, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Application 5

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Déterminer $f''(x)$, dérivée seconde de *f*.

2. En déduire le signe de $f''(x)$ puis les variations de f' sur $]0;+\infty[$.

3. En déduire alors le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]0;+\infty[$.

4. En déduire alors le signe de $f(x)$.

5. En déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$

Remarque

En cas de forme indéterminée, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.

Application 6

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$