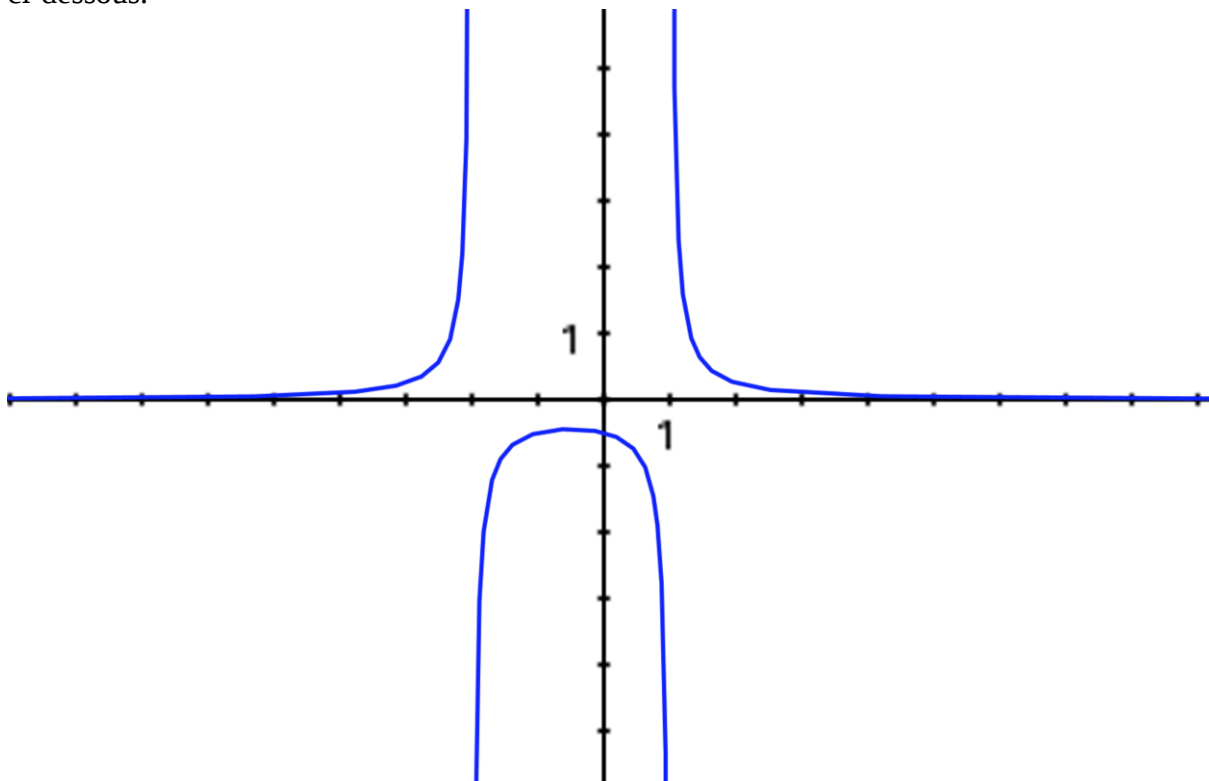


04 : Limites de fonctions

Exercice 1

Soit une fonction f définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$ et sa courbe représentative donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les limites aux bornes de son ensemble de définition (c'est-à-dire en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 et en 1 à gauche et à droite.)

Exercice 2

Que peut-on dire des limites suivantes concernant les asymptotes horizontales ou verticales ?

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Exercice 3

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	0 $+\infty$		$-\infty$ 3

1. Préciser les limites de f qui figurent dans ce tableau.

2. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Exercice 4

Calculer les limites suivantes et donner lorsque c'est possible une interprétation géométrique de ces limites.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{2x + 1}$
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x - 5}{x^2 - 4x + 3}$
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x - 5}{x^2 - 4x + 3}$
6. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x-1}{3x+1}}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1}}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 5}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1}\right)$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + 2 \cos^2 x) e^{1-x}$.

1. Montrer que pour tout réel x on a : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$
2. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Donner si c'est possible une interprétation géométrique de ces limites.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2} e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.
2. a. Montrer que, pour tout réel x , on a : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.
b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Justifier que la courbe C_f admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.

b. Etudier la position relative entre C_f et d .

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter le résultat.

2. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat.