05 : Convexité

I. Dérivée seconde d'une fonction

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée seconde de f sur I la dérivée de f' et on la note f''.

Application 1

Déterminer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

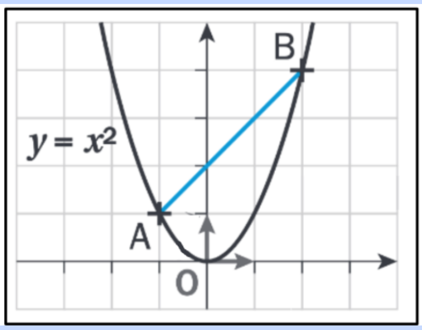
$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ $\qquad g(x)=xe^x$ $\qquad h(x)=\sin(2x)$

II. Fonction convexe – Fonction concave

1. Corde

Définition

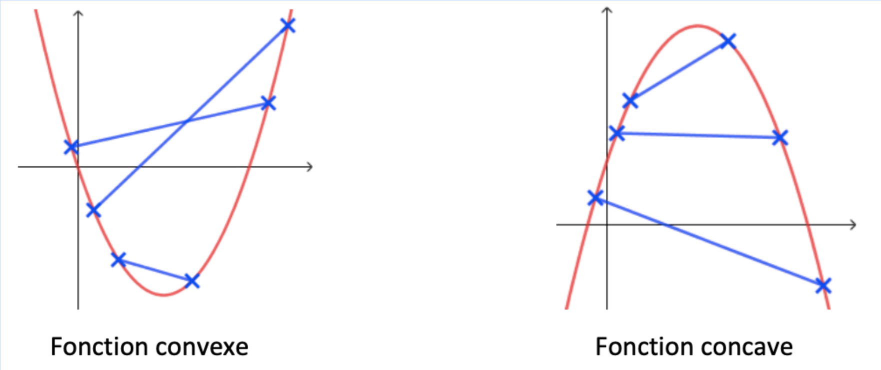
Une corde est un segment reliant deux points de la courbe représentant une fonction.



Définition

- f est une fonction convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- f est une fonction concave sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

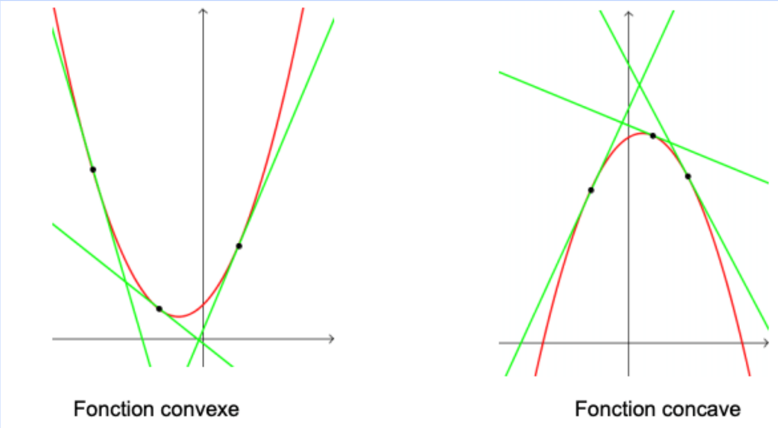


2. Tangente

Définition

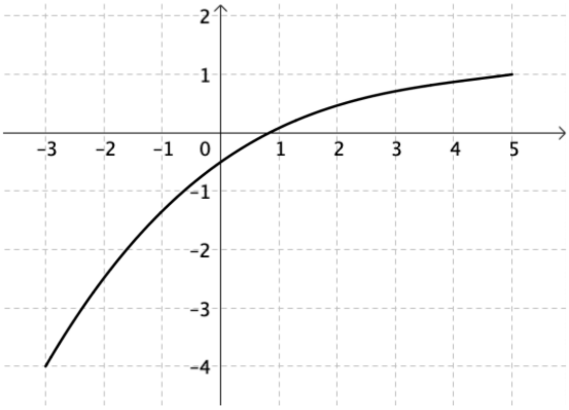
- f est une fonction convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

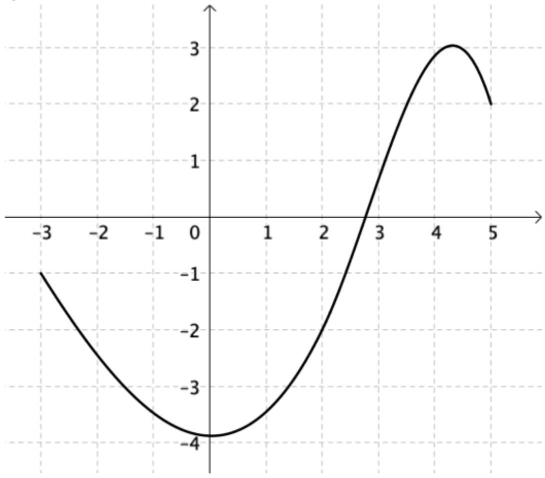
- f est une fonction concave sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



Application 2

Reconnaître graphiquement la convexité des 2 fonctions suivantes :





Propriété

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle *I*.

- La fonction *f* est convexe sur *I*, si sa dérivée f' est croissante sur *I*, autrement dit $f''(x) \geq 0$, pour tout *x* de *I*.
- La fonction *f* est concave sur *I*, si sa dérivée f' est décroissante sur *I*, autrement dit $f''(x) \leq 0$, pour tout *x* de *I*.

Démonstration

Soit *f* une fonction telle que $f''(x) \geq 0$ sur *I*.

On considère la fonction *g* dérivable sur *I* et définie par :

$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ Alors $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f' est croissante sur *I*, car $f''(x) \geq 0$, donc g' est également croissante.

De plus, $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.

Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$. On a alors :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc $g(x) \geq 0$ sur *I*.

Autrement dit $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \geq 0$

Donc $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

Donc C_f est au-dessus de ses tangentes sur *I*, autrement dit *f* est convexe sur *I*.

Méthode

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut étudier le signe de sa dérivée seconde.

Application 3

Étudier la convexité de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

3. Point d'inflexion

Définition

Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I*.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Propriété

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.
Autrement dit en ce point la courbe change de convexité, et donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Application 4

Déterminer la convexité de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 1$.

Préciser le ou les points d'inflexion.

Application 5

Déterminer la convexité de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{x^3}{6} - 3x^2 + x - 1$.

Préciser le ou les points d'inflexion.