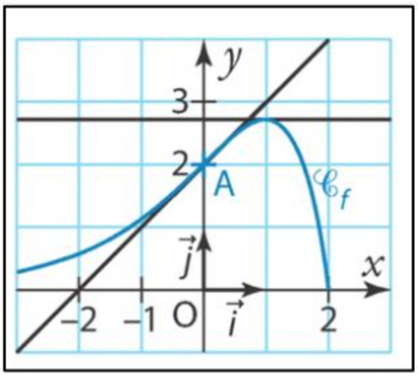
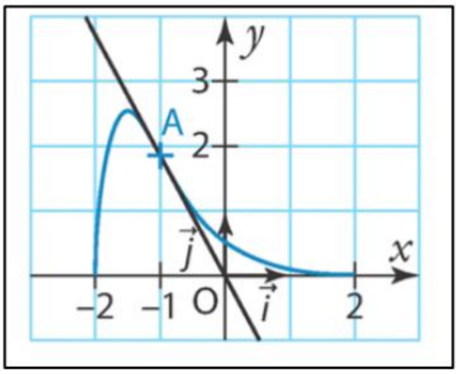
05 : Convexité

Exercice 1

A l'aide des graphiques ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave ou convexe dans chacun des cas suivants :





Exercice 2

A l'aide des tableaux ci-dessous, étudier la convexité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1.

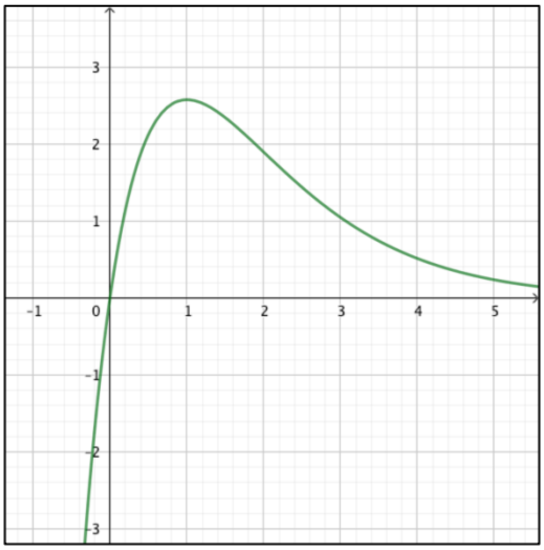
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f'		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	

2.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	

Exercice 3

On considère la fonction *f* deux fois dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7xe^{-x}$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



Partie A : conjectures

1. *f* semble-t-elle convexe ? Concave ?

2. C_f semble-t-elle présenter des points d'inflexion ?

Partie B : preuves

1. Calculer $f'(x)$ pour tout *x* réel et en déduire les variations de *f*.

2. a. Calculer $f''(x)$ pour tout *x* réel.

b. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la convexité de *f* et les éventuels points d'inflexion.

Exercice 4

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^5+\frac{25}{3}x^4+\frac{20}{3}x^3-80x^2+8x+1$.

1. Montrer que, pour tout *x* réel, $f''(x)=20(x-1)(x+2)(x+4)$.

2. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la convexité de *f* en précisant les points d'inflexions éventuels.

Exercice 5

On considère la fonction inverse *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que, pour tous réels $x>0$ et $a>0$, on a :

$$f(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]=\frac{(a-x)^2}{a^2x}.$$

2. En déduire la convexité de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$.

Exercice 6

On considère la fonction définie pour tout réel *x* par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1. Justifier que pour tout réel , $0<f(x)<1$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter les résultats.

3. Montrer que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

5. Justifier que *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel *x*,

$$f''(x)=\frac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

6. En déduire la convexité de *f*.

Exercice 7

Soit *n* un entier naturel non nul. On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(1+x)^n.$$

1. La fonction *f* est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?

2. a. En utilisant la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x\geq 0$, on a :

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

b. Quelle inégalité a-t-on démontré ?

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6+3x^2+6$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

3. En déduire que pour tout réel x : $x^6+3x^2+6\geq 12x-2$.

Exercice 9

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x}+3x^4$.

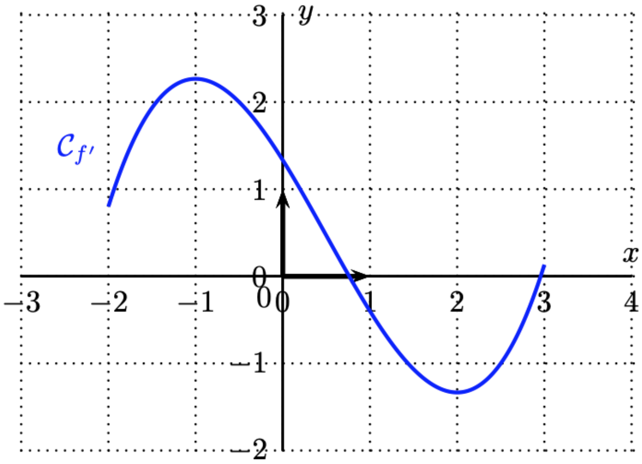
1. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de g.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+3x^4+x-1$.
Montrer la courbe de f est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 10

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $[-2;3]$ et dont la dérivée f' est représentée ci-dessous :



Déterminer la convexité de f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion de sa courbe.

Exercice 11

L'objectif est d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)e^x+x$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. a. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=(x+1)e^x$.

b. Étudier le signe de $f''(x)$.

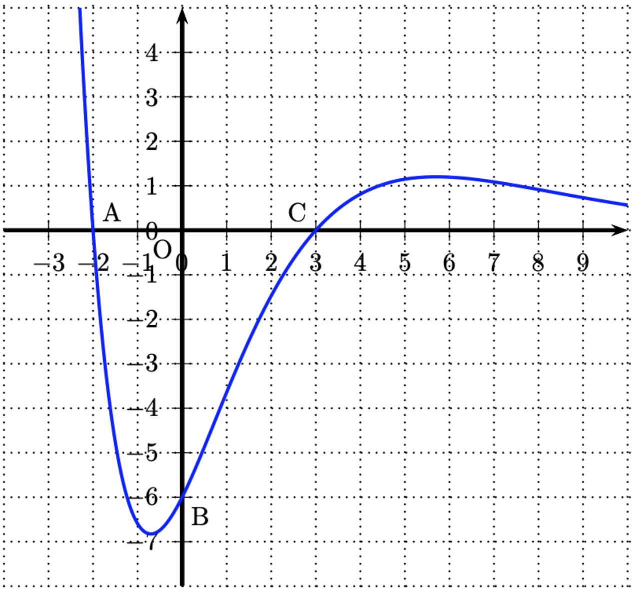
c. En déduire les variations de la fonction f'.

3. Déterminer le signe de $f''(x)$.

4. En s'intéressant au minimum de f', conclure sur les variations de la fonction f.

Exercice 12

On considère une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction *f*, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2;0)$ $B(0;-6)$ et $C(3;0)$.



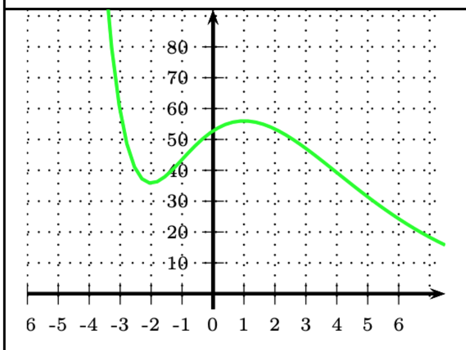
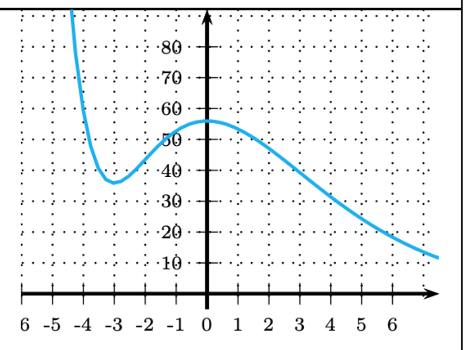
Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de *f* admet-elle des points d'inflexion ?

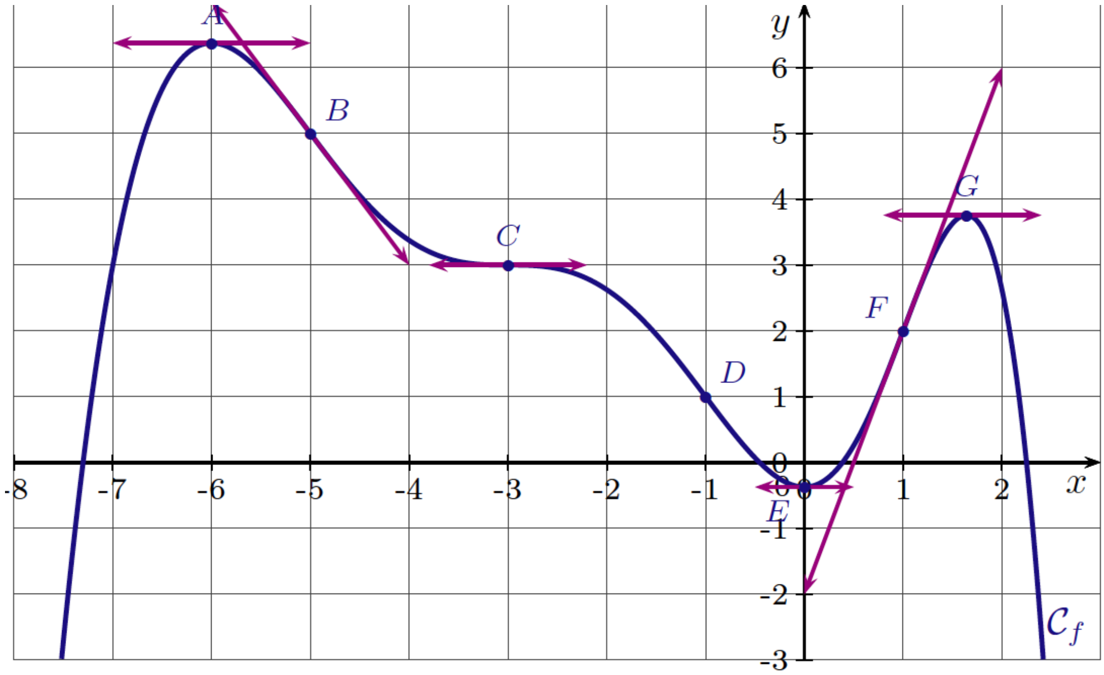
2. Sur $[-2;3]$, la fonction *f* est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction *f* : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1	Courbe 2
	

Exercice 13

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer $f'(1)$.

2. La tangente à la courbe C_f au point *D* a pour équation $y=-2x-1$.

a. Tracer la tangente à la courbe C_f au point *D*.

b. Le point *D* est-il un point d'inflexion de la courbe C_f ?

c. Déterminer $f'(-1)$.

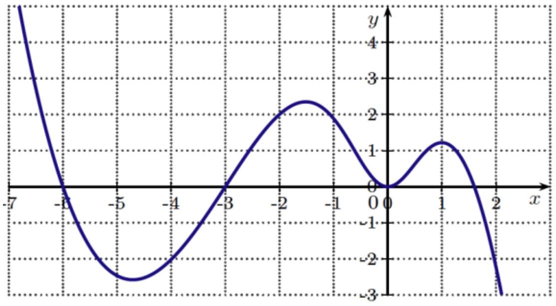
3. Déterminer $f'(-5)$ et $f''(-5)$.

4. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles <, = ou > est approprié :

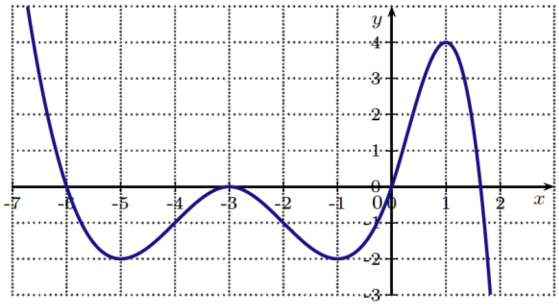
a. $f'(6)....0$ **b.** $f'(-7)....f'(-2)$

c. $f''(-7)....f''(0)$ **d.** $f'(-3)....f''(-3)$

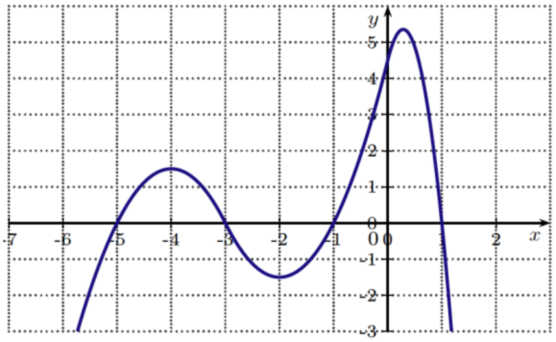
5. Une des quatre courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.
Déterminer celle qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.



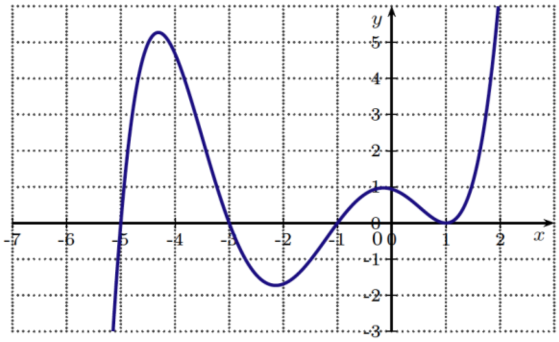
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$