06 : Continuité

I. Notion de continuité

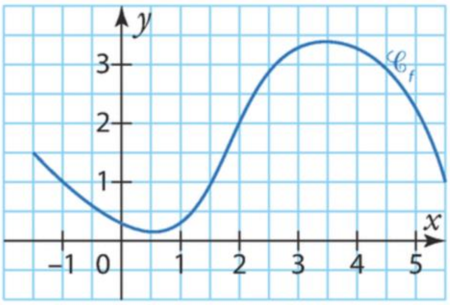
Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

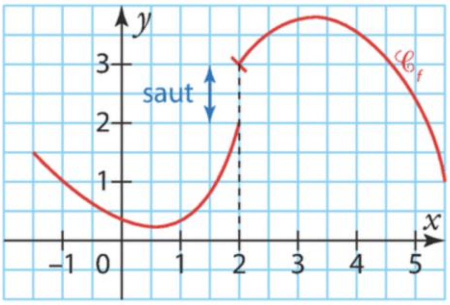
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarques

Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.



Fonction continue sur son intervalle de définition



La fonction f n'a pas de limite en 2

f est discontinue en 2 donc non continue sur son intervalle de définition

Exemple

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et elle est continue sur $]0;+\infty[$.

Remarque

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Application 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ pour } x \leq 3 \\ 8-x \text{ pour } 3 < x < 7 \\ 2x-12 \text{ pour } x \geq 7 \end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

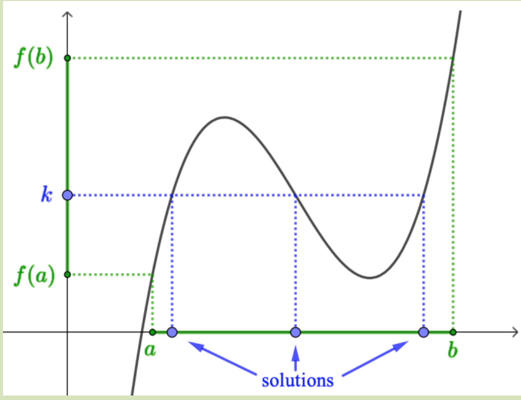
Application 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 \text{ si } x < 1 \\ x - k \qquad \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction *f* définie et continue sur un intervalle $\left[a;b\right]$.
Pour tout réel *k* compris entre $f\left(a\right)$ et $f\left(b\right)$, il existe au moins un réel $c\in\left[a;b\right]$ tel que $f\left(c\right)=k$.



Conséquence

Dans ces conditions, l'équation $f\left(x\right)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[a;b\right]$.

Exemple

On donne le tableau de variations de la fonction *f*.

x	-4		-3		-1		1
f			3				19
		↗		↘		↗	
	-1				-1		

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f\left(x\right)=k$.

- L'équation $f\left(x\right)=18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $\left[-1;1\right]$.

- L'équation $f\left(x\right)=0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $\left[-4;-3\right]$, $\left[-3;-1\right]$[et $\left[-1;1\right]$.

- L'équation $f\left(x\right)=-3$ ne possède pas de solution.

- L'équation $f(x)=3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $\left[-1;1\right]$

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur I.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x-1$.

1. Construire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. On donnera les limites directement.
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;1]$.
3. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=x^3+3x-2$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g\left(\alpha\right)=0$ sur $\left[0;1\right]$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de de $g\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

Déterminer $f'\left(x\right)$ et construire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.