06 : Continuité

Exercice 1

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+3 \text{ si } x\leq -1 \\ \dfrac{2}{x^2+1} \text{ si } x>-1 \end{cases}$$

Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-12x+1$.

1. Construire le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$. On admettra les limites de *f* en l'infini.

2. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

3. a. montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique de solution α sur $[-2;2]$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $[2;+\infty[$.

c. Donner un encadrement de β à 10^{-2} près.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^5+2x-2$.

1. Montrer que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $f(x)=8$ possède une unique solution α sur $[1;2]$.

3. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 4

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+x-1$.

1. Construire le tableau de variations de *g* sur $\mathbb{R}$. On admettra les limites de *g* en l'infini.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

3. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

4. En justifiant, donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$, une unique solution α.

b. Donner un encadrement de α à 0,1 prés.

3. Déterminer le signe de $g(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.

a. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de l'équation $(E): e^x=\dfrac{1}{x}$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-e^{-x}$.

1. Démontrer que α est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x)=0$.

2. a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution réelle, qu'on notera α.

c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 7

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;2]$.

b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction *f*

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}+2$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a. Montrer que $f(x)=\dfrac{x}{e^x}.\dfrac{1}{1+e^{-x}}+2$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. a. Montrer que la fonction dérivée de *f* a même signe que la fonction *g* étudiée dans la Partie A.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Métropole sept 25

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas. La glycémie en g.L^{-1} en fonction du temps *t*, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction *f* définie sur $[0;6]$ par :

$$f(t)=(t+1)e^{-0,4t}.$$

1. a. Montrer que, pour tout $t\in[0;6]$, $f'(t)=(-0,4t+0,6)e^{-0,4t}$.

b. Étudier les variations de *f* sur $[0;6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à 0,7 g.L^{-1}.

a. Démontrer que sur l'intervalle $[0;6]$ l'équation $f(t)=0,7$ admet une unique solution que l'on notera α.

b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est- elle en hypoglycémie ? On exprimera ce temps à la minute près.