07 : Loi binomiale

I. Rappels

Formules

- Probabilité conditionnelle : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- Formule des probabilités totales : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
- A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Leftrightarrow P_A(B)=P(B)$

Application 1 : Polynésie 22

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

C : « le casque est contrefait » ;

D : « le casque présente un défaut de conception » ;

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

1. Calculer $P(C\cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que le casque présente un défaut est de 0,036.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

II. Succession d'épreuves indépendantes

Univers associé

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement Ω_1, Ω_2,…, Ω_n.

L'univers associé à cette succession de n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Exemple 1

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat.
- On tire plusieurs fois une boule d'une urne et on la remet dans l'urne.

Exemple 2

On lance un dé cubique puis on jette une pièce de monnaie.
L'univers associé à l'expérience est : $\{1;2;3;4;5;6\} \times \{P;F\}$.
Des issues possibles sont $(3;P)$ ou $(5;F)$ mais pas $(F;2)$ ou $(P;P)$.

Probabilité

Lors d'une répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ est égale au produit des probabilités qui la compose $P(x_1)\times P(x_2)\times\ldots\times P(x_n)$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, chaque issue a la même probabilité. On a par exemple :
$P(5;F) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Application 2

On considère deux urnes contenant des billets indiscernables au toucher. La 1$^{\text{ère}}$ urne contient 10 billets dont 8 de 5 € et 2 de 10 €. La 2$^{\text{ème}}$ urne contient 12 billets dont 8 de 10 € et 4 de 20 €.
On tire un billet de la 1$^{\text{ère}}$ urne puis un billet de la 2$^{\text{ème}}$ urne.
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de gagner au moins 25 €.

II. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S), l'autre échec $(\overline{S})$.

Exemple

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.
On tire une boule au hasard.
Cette expérience a trois issues, mais l'on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli en prenant pour succès, par exemple S : « Tirer une boule rouge » et pour échec $\overline{S}$: « Tirer une boule bleue ou jaune ».

2. Loi de Bernoulli

Définition

Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- La probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- La probabilité d'obtenir un échec est égale à $1-p$.
- p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemple

Dans l'exemple précédent on a $p=0,3$

Par convention

Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
On a alors la loi de Bernoulli représentée par le tableau suivant :

k	1	0
$p(X=k)$	p	$1-p$

Dans l'exemple précédent on a

k	1	0
$p(X=k)$	0,3	0,7

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
On a alors : $E(X) = p$ $\qquad V(X) = p(1-p)$

Démonstration

$E(X) = 1 \times p + 0(1-p)$
$E(X) = p$

$V(X) = 1^2 \times p + 0^2(1-p) - p^2$
$V(X) = p - p^2$
$V(X) = p(1-p)$

3. Schéma de Bernoulli

Définition

Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

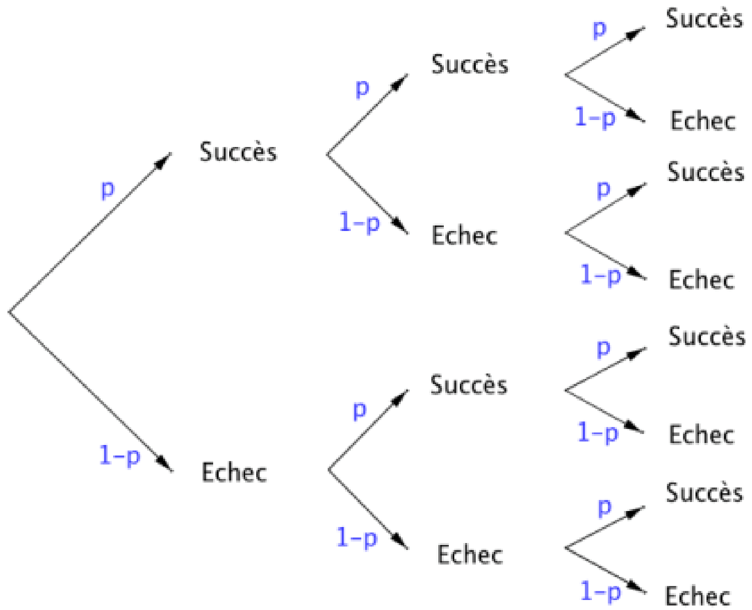
4. Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
On la note $B(n; p)$.

Exemple

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre *p*.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- $p(X=3)=p^3$.
  En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à $p\times p\times p$.

- $X=2$ correspond aux suites d'issues suivantes :
  (Succès ; Succès ; Échec)
  (Succès ; Échec ; Succès)
  (Échec ; Succès ; Succès)
  Chacune des issues a une probabilité égale à : $p^2(1-p)$ donc on a :
  $$p(X=2)=3p^2(1-p)$$

Application 3

Dans une trousse il y a 4 stylos dont 1 rouge. On tire trois fois de suite un stylo en le remettant à chaque fois dans la trousse. On considère comme succès l'évènement « Obtenir un stylo rouge ».
Soit *X* la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Calculer $P(X=2)$ en utilisant un arbre pondéré.

5. Coefficients binomiaux

Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$.
On appelle coefficient binomial ou combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Remarque

TI Nspire : Menu 5 – 3

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$, alors pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration

En effet, un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p, et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k (1-p)^{n-k}$.

Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

6. Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$ alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

Application 4

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes.
Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule de l'urne et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules gagnantes.
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

Réponses

1. On répète 4 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve à deux issues :

- Boules gagnantes (5 issues) ;
- Boules perdantes (7 issues).

Le succès est d'obtenir une boule gagnante.

La probabilité du succès sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 4$ et $p = \frac{5}{12}$.

2.

Exercice

Un QCM comporte trois questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève donne au hasard une réponse à chaque question.
On note X le nombre de réponses correctes données par l'élève.

1. Justifier que la situation relève d'une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right)$. Donner une interprétation de $E\left(X\right)$.

3. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Répondre juste à toutes les questions » ;
B : « Répondre juste à 2 questions » ;
C : « Répondre juste à aucune questions » ;
D : « Répondre juste à au moins une question ».