07 : Loi binomiale

Exercice 1

Une urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires.
1. On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité p que cette boule soit rouge ?

2. On tire trois fois de suite avec remise une boule de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
a. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.

b. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.

c. Déterminer $P(X=2)$, puis $P(X>2)$.

Exercice 2

Lors d'une épidémie de fièvre bovine, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt, on peut la guérir, sinon elle est mortelle.
Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de cet élevage permet de considérer les épreuves comme indépendantes.
On note M la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
1. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.

2. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{M=0\}$.

4. Calculer $P(M=1)$.

5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux des animaux aient un test positif ?

Exercice 3

Dans une coopérative fruitière, on estime la proportion de fruits présentant un défaut à 5 %.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de douze fruits, associe le nombre de fruits examinés présentant un défaut.
1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité que 3 fruits présentent un défaut.

3. Calculer $P(4\leq X\leq 7)$.

4. Calculer $P(X<5)$

5. Si le nombre de fruits présentant un défaut dans un lot est strictement supérieur à deux, le lot est soldé. Quelle est la probabilité que cela arrive ?

Exercice 4

On considère les fonction Python ci-dessous :

```
def bernoulli1():
    if random.random() <=0.63:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

```
def bernoulli2():
    if random.random() <=0.41:
        x=0
    else:
        x=1
    return x
```

1. Justifier que la variable aléatoire X donnant la valeur renvoyée par la fonction bernoulli1 suit une loi de Bernoulli et donner le paramètre de cette loi.

2. Justifier que la variable aléatoire X donnant la valeur renvoyée par la fonction bernoulli2 suit une loi de Bernoulli et donner le paramètre de cette loi.

Exercice 5

1. On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(20;0,36)$.

Calculer $P(X=8)$, $P(X\geq 11)$ et $P(X\leq 6)$.

2. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale $B(52;0,4)$.

Calculer $P(Y<21)$, $P(Y>19)$ et $P(10<Y<27)$.

3. On considère la variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,81$.

Calculer $P(Z>84)$, $P(25<Z\leq 74)$ et $P(37\leq Z<79)$.

Exercice 6

Un artiste expose son nouveau concept : chaque mois, il crée une œuvre unique qu'il expose dans un lieu à chaque fois différent. Après l'exposition, si l’œuvre n'est pas vendue, elle est détruite. Il recommence ainsi le mois suivant. Vu la notoriété de l'artiste, on estime à 0,85 la probabilité que l’œuvre soit vendue une fois exposée.

Les ventes sont indépendantes les unes des autres. Soit X la variable aléatoire qui, à une période de n mois, associe le nombre d'œuvres vendues.

1. L'artiste décide d'étaler son projet sur un trimestre.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ces paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'artiste vende une œuvre exactement.

2. Finalement l'artiste décide de réaliser ce projet sur un an.

a. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'artiste vende exactement 9 œuvres. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

3. Sur combien de mois l'artiste doit-il étaler son projet pour que la probabilité de ne pas vendre toutes ses œuvres dépasse 0,95 ?

Exercice 7 : Métropole juin 24

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service de clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Les achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménagers, soit dans une enseigne de grandes surfaces. Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasins d'électroménagers 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

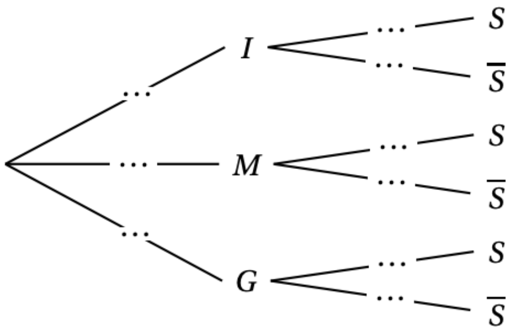
- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur. On définit les évènements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S)=0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

Exercice 6 : Asie 24

Dans la revue Lancet Public Health, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
https://www.thelancet.com/journals/eclinm/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020. On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 ».
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) < 0,9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

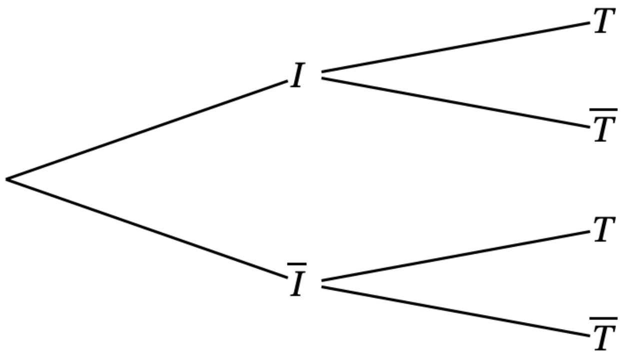
Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19. Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $P(T) = 0,05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.