07 : Primitives et équations différentielles

Exercice 1

Prouver dans les cas suivants que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I proposé.

1. $f(x)=\dfrac{2(x^4-2)}{x^3}$ et $F(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$

2. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ et $F(x)=\ln(1-e^x)-x$ sur $I=]0;+\infty[$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et $F(x)=\ln(\ln x)$ sur $I=]1;+\infty[$

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=x^4-x^3+3x^2-5x+4$, $I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=(x+5)^2$, $I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $I=]0;+\infty[$

4. $f(x)=x(3-x^2)^4$, $I=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $I=]0;+\infty[$

6. $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$, $I=]5;+\infty[$

7. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$, $I=]-1;0[$

8. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$, $I=\mathbb{R}$

9. $f(x)=\dfrac{3}{(x+2)^4}$, $I=]-2;+\infty[$

10. $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x}$, $I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'=5y$

2. $y'+3y=0$

3. $y'=2y+1$

4. $2y'-4y=3$

5. $4y'+6y-1=0$

6. $2y'=3y-4$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes avec la condition initiale proposée :

1. $y' = -3y$ avec $f(-5) = 1$

2. $3y' - 6y = 0$ avec $f(1) = 3$

3. $y' = 2y + 1$ avec $f(0) = -1$

4. $2y' + 3y + 5 = 0$ avec $f(0) = 2$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = e^{3x}$.

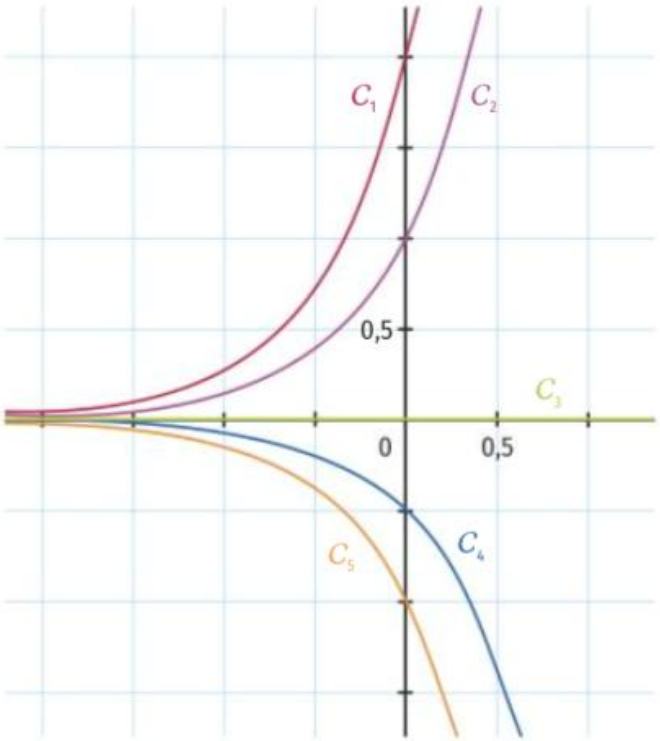
1. Déterminer le réel *a* tel que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{3x}$ soit une solution particulière de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

3. Déterminer la solution particulière vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 6

Dans un repère du plan, on a tracé les représentations graphiques de cinq solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$. En justifiant, préciser leur expression algébrique.



Exercice 7

Une colonie de 2000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t>0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle

$(E): N'(t)=3N(t)-0,005(N(t))^2$.

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ et on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction g par $g(t)=\dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.

2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation :

$$(E'): y'=-3y+0,005.$$

3. Résoudre (E') puis résoudre (E).

4. a. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.

b. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

Exercice 8

On étudie une épidémie dans une population. Au début de l'épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminé. Pour $t\in[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes, après t jours, touchées par la maladie. On a alors $y(0)=0,01$.

On admet que y est dérivable et strictement positive sur $[0;30]$ et vérifie l'équation :

$$(E): y'=0,05y(10-y)$$

1. On considère la fonction $z=\dfrac{1}{y}$ définie sur $[0;30]$.

Démontrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z vérifie $(E'): z'=-0,5z+0,05$ avec $z(0)=100$.

2. a. Déterminer la fonction z qui vérifie (E').

b. En déduire la fonction y solution de (E).

3. a. Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.

b. Étudier la limite de y en $+\infty$ et interpréter dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 9

La température en degré Celsius d'une pièce de fonte est une fonction *f* du temps *t*, exprimé en minutes, depuis sa sortie du four. La pièce sort du four à 1400 ˚C.
On admet que cette fonction *f*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est une solution de l'équation différentielle :

$$(E): y'+0,065y=1,3$$

1. a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Donner la fonction *f* vérifiant la condition initiale.

2. a. Déterminer, à la minute près, le temps nécessaire pour que la température de la pièce de fonte soit à 100 ˚C.

b. Déterminer les variations et la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. Recopier et compléter le programme en Python ci-joint permettant de trouver à la minute près le temps à partir duquel la pièce de fonte ne refroidit plus (température à moins de 1˚C de sa limite) puis donner le résultat en heures minutes.

```
from math import*
t=0
T=...
while .......:
    t=...
    T=......
print(...)
```