08 : Logarithme népérien

I. Définition de la fonction logarithme népérien

1. Lien avec la fonction exponentielle

Propriété

Pour tout nombre $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

- La fonction exponentielle est strictement continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $a \in]0;+\infty[$

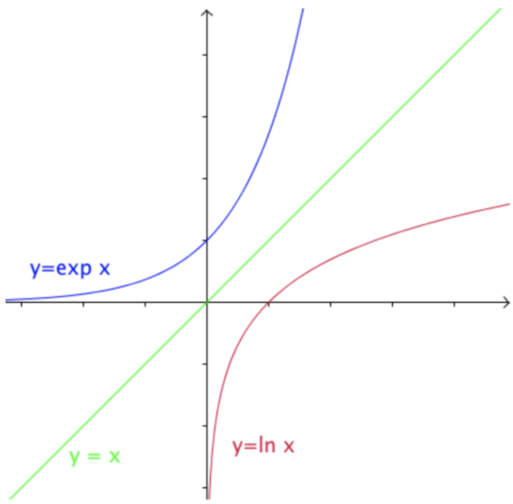
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif *a*, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln(a)$.

Remarque

La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des fonctions réciproques donc leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



On a ainsi les propriétés suivantes :

Propriétés

- Pour tout réel $x>0$ et tout nombre réel y, on a : $y=\ln(x) \Leftrightarrow x=e^{y}$.
- $\ln(1)=0$ et $\ln(e)=1$
- Pour tout réel x : $\ln(e^{x})=x$
- Pour tout réel $x>0$: $e^{\ln(x)}=x$

Application 1

1. Simplifier :

a. $\ln\left(e^{-\sqrt{5}}\right)=$

b. $e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}=$

2. Résoudre les équations :

a. $\ln(x)=-1$

b. $e^{x}=7$

c. $2-5\ln(x)=0$

d. $3-4e^{x}=1$

2. Relation fonctionnelle

Théorème

Pour tout nombre réels x et y strictement positif, on a :

$$\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$$

Démonstration

$e^{\ln(x\times y)}=x\times y=e^{\ln(x)}\times e^{\ln(y)}=e^{\ln(x)+\ln(y)}$ donc $\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$.

Propriétés

Pour tout nombre réels x et y strictement positif, et pour tout nombre entier n on a :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)$
- $\ln\left(x^n\right)=n\ln(x)$

Démonstration

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\times x\right)=\ln(1)=0$ donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x)=\ln\left(\sqrt{x}\times\sqrt{x}\right)=\ln\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(\sqrt{x}\right)=2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ donc $\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)$
- On démontre la dernière propriété par récurrence.
  Pour $n=0$, $\ln\left(x^0\right)=\ln(1)=0=0\times\ln(x)$

  Supposons qu'il existe un entier n tel que : $\ln\left(x^n\right)=n\ln(x)$

  Montrons que $\ln\left(x^{n+1}\right)=(n+1)\ln(x)$

On a : $\ln\left(x^{n+1}\right)=\ln\left(x^n\times x\right)=\ln\left(x^n\right)+\ln(x)=n\ln(x)+\ln(x)=(n+1)\ln(x)$. Donc vraie pour tout entier n.

Exercice 1

1. Simplifier les nombres suivants :

$A=\ln\left(5-\sqrt{3}\right)+\ln\left(5+\sqrt{3}\right)$

$B=3\ln(2)+\ln(5)-2\ln(3)$

$C=\ln\left(e^2\right)-\ln\left(\frac{2}{e}\right)$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$C=\ln\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{18}\right]+\ln\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^{18}\right]$

$D=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

II. Fonction logarithme népérien

1. Dérivée et variations

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et a pour dérivée la fonction inverse : $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Application 2

Déterminer la dérivée de $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

2. Équations et inéquations

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

En particulier : $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(x+4) \geq 2$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $1 - 0,85^n \geq 0,95$

3. Limites

Propriété

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Conséquence

La courbe représentant la fonction ln admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4. Convexité

Propriété

La fonction logarithme népérien est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

Démonstration

$f(x)=\ln x \quad f'(x)=\dfrac{1}{x} \quad f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ donc ln est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=3-x+2\ln x$.

1. Déterminer les limites de *f*.
2. Calculer $f'(x)$ étudier son signe.
3. Construire le tableau de variation de *f*.
4. Étudier la convexité de *f*.

4. Composée avec ln

Propriété

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 4 : Métropole secours 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

III. Limites par croissances comparées

Théorème

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul *n*, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et pour tout entier non nul *n*, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

Démonstration du 2 pour $n=1$

Posons $X = \ln x$. Ainsi $e^X = x$, et donc $x\ln x = e^X \times X = Xe^X$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} X = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

Remarque

En cas de forme indéterminée, les puissances de *x* l'emportent sur la fonction ln.

Application 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (diviser par *x*)