09 : Primitives et équations différentielles

Exercice 1

Prouver dans les cas suivants que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I proposé.

1. $f(x)=\dfrac{2(x^4-2)}{x^3}$ et $F(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ et $F(x)=\ln(1-e^x)-x$ sur $I=]0;+\infty[$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et $F(x)=\ln(\ln x)$ sur $I=]1;+\infty[$.

Exercice 2

Montrer que F et G définies sur $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ par $F(x)=\dfrac{5x^2-7x+9}{3x-1}$ et $G(x)=\dfrac{5x^2-16x+12}{3x-1}$ sont la primitive d'une même fonction f.

Exercice 3

Dans chacun des cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=x^4-x^3+3x^2-5x+4$, $I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=(x+5)^2$, $I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $I=]0;+\infty[$

4. $f(x)=x(3-x^2)^4$, $I=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $I=]0;+\infty[$

6. $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$, $I=]5;+\infty[$

7. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$, $I=]-1;0[$

8. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$, $I=\mathbb{R}$

9. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$, $I=]-2;+\infty[$

10. $f(x)=\cos(x)+\sin(x)$, $I=\mathbb{R}$

11. $f(x)=x\cos(x^2+1)$, $I=]-2;+\infty[$

12. $f(x)=\cos(x)\sin^2(x)$, $I=\mathbb{R}$

Exercice 4

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sin(x)-\cos(x)$ vérifiant $F(\pi)=2$

Exercice 5

1. Montrer que la fonction F définie par $f(x)=x\ln x-x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=\ln x$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice 6

Déterminer la primitive F de la fonction f telle que la condition proposée soit réalisée :

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+3x+1}$ telle que $F(0)=1$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ telle que $F(2)=2\sqrt{5}$.

3. $f(x)=xe^{x^2-1}$ telle que $F(1)=\dfrac{3}{2}$.

4. $f(x)=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ telle que $F(0)=2$.

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$.

1. Montrer que pour tout $x>-2$, $g(x)=3-\dfrac{13}{(x+2)^2}$.

2. Déduire alors la primitive de g qui prend la valeur 33 pour $x=11$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x>1$, $g(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2. Déduire alors la primitive de f telle que $F(2)=3$.

Exercice 9

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'=5y$

2. $y'+3y=0$

3. $y'=2y+1$

4. $2y'-4y=3$

5. $4y'+6y-1=0$

6. $2y'=3y-4$

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes avec la condition initiale proposée :

1. $y'=-3y$ avec $f(-5)=1$

2. $3y'-6y=0$ avec $f(1)=3$

3. $y'=2y+1$ avec $f(0)=-1$

4. $2y'+3y+5=0$ avec $f(0)=2$

Exercice 11

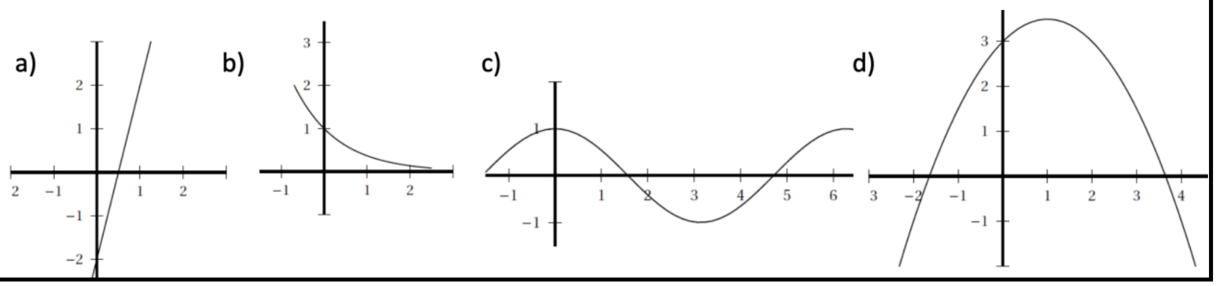
Dans chacun des cas suivants, déterminer, en justifiant la réponse, la seule proposition correcte :

1. On considère l'équation différentielle $y''+9y=0$ où y désigne une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Une fonction f solution de cette équation est définie par :

a. $f(x)=3$ **b.** $f(x)=x^2-4$ c. $f(x)=e^{3x}$ d. $f(x)=\sin(3x)$

2. On considère l'équation différentielle $y'+2y=0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
La représentation graphique d'une solution de cette équation dans un repère orthonormé est :



Exercice 12

Soit l'équation différentielle $(E): y'+2y=e^{3x}$.

1. Déterminer le réel a tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ae^{3x}$ soit une solution particulière de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

3. Déterminer la solution particulière vérifiant $y(0)=1$.

Exercice 13

Une colonie de 2000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t>0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle :

$$(E): N'(t)=3N(t)-0,005\left(N(t)\right)^2$$

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ et on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction g par $g(t)=\dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.

2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation :

$$(E'): y'=-3y+0,005.$$

3. Résoudre (E') puis en déduire les solutions de (E).

4. a. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.

b. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

Exercice 14

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.
Une entreprise congèle des ailes de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. A l'instant $t = 0$, les ailes, à une température de 5°C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24°C.

Partie A

La température des ailes dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = 35e^{-1,6t} - 30.$$

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes.

2. Étudier le sens de variations de la fonction f.

3. Si les ailes de poulet sont laissées une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailes sera-t-elle conforme au cahier des charges ?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

Partie B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailes dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 1,5y = -52,5.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. a. Justifier que $g(0) = 5$.

b. Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$.

3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

Exercice 15

On étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour $t \in [0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes, après t jours, touchées par la maladie. On a alors $y(0) = 0,01$.
On admet que y est dérivable et strictement positive sur $[0;30]$ et vérifie l'équation :

$$(E) : y' = 0,05y(10 - y)$$

1. On considère la fonction $z = \dfrac{1}{y}$ définie sur $[0;30]$.
Démontrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z vérifie $(E') : z' = -0,5z + 0,05$, avec $z(0) = 100$.

2. a. Déterminer la fonction z qui vérifie (E').

b. En déduire la fonction y solution de (E).

3. a. Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.

b. Étudier la limite de y en $+\infty$ et interpréter dans le contexte de l'énoncé.