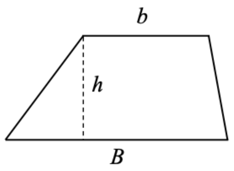
10 : Géométrie dans l'espace

I. Rappels aires et volumes

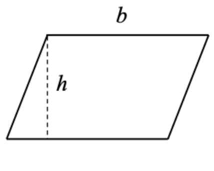
▷ **Aires de surfaces planes :**

Trapèze



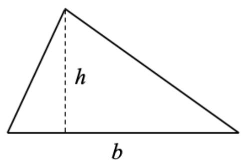
Aire : $\mathcal{A} = \left(\frac{B+b}{2}\right)\times h$

Parallélogramme



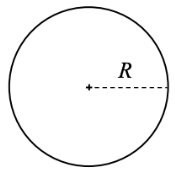
Aire : $\mathcal{A} = bh$

Triangle



Aire : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$

Cercle

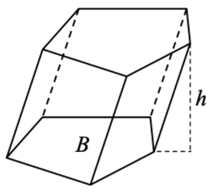


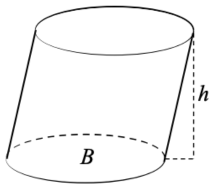
Périmètre : $\mathcal{P} = 2\pi R$

Aire : $\mathcal{A} = \pi R^2$

▷ **Volumes :**

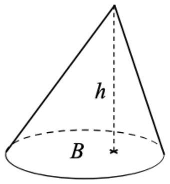
Pavé, Cylindre, Prisme

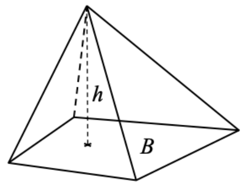




Volume : $\mathcal{V} = Bh$

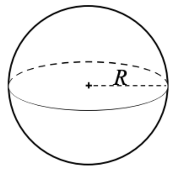
Cône, Pyramide





Volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}Bh$

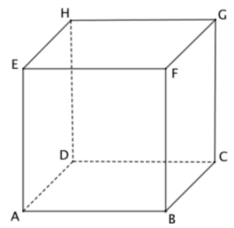
Sphère



Surface : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$

Volume : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

II. Rappels sur la perspective cavalière



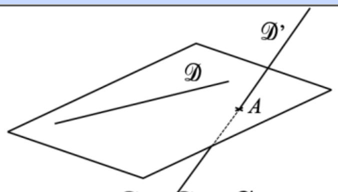
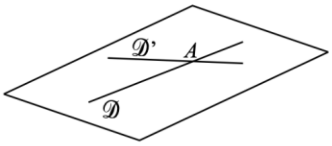
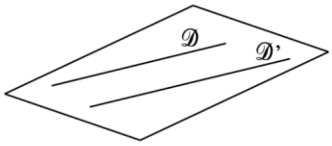
- La représentation en perspective cavalière correspond à l'ombre, sur un écran, d'un objet éclairé par le soleil. Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre de l'objet sur l'écran est une représentation en perspective cavalière de cet objet.
- La représentation d'une droite est une droite.
- Les représentations de deux droites parallèles sont deux droites parallèles
- Il y a conservation du rapport des longueurs de deux segments parallèles et par suite conservation du milieu.
- Les figures situées dans un plan vu de face (appelé plan frontal) sont représentées en vraie grandeur, la forme, les angles et l'orthogonalité sont respectées.

- Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes, mais attention la réciproque n'est pas vraie, si dans une représentation en perspective cavalière deux droites apparaissent sécantes, elles peuvent être sécantes ou non-coplanaires.
- Les segments cachés sont représentés en pointillés, les segments visibles sont représentés en traits pleins.
- La perspective parallèle ne conserve pas les angles et les longueurs des figures qui ne sont pas dans les plans frontaux : Un rectangle ou un carré devient un parallélogramme, un cercle devient une ellipse, un angle de 90° peut apparaître réduit.

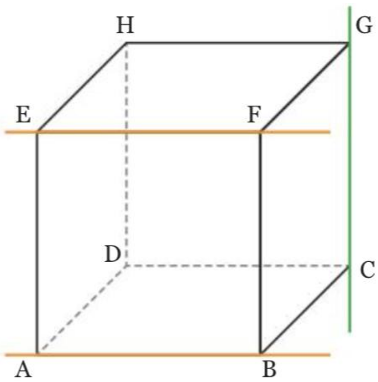
A retenir

Tout théorème de géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

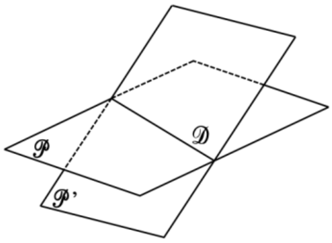
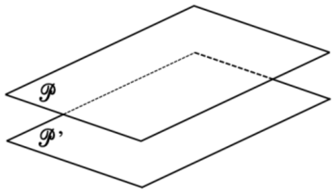
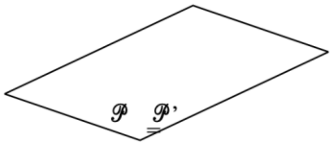
III. Positions relatives de droites et de plan

Position relative de deux droites distinctes de l'espace		
 $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$ Les droites sont disjointes et ne sont pas contenues dans un même plan.	 $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{A\}$ Les droites ont un unique point commun A.	 $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$ Les droites sont disjointes et sont contenues dans un même plan.
Non-coplanaires	**Sécantes**	**Parallèles**
	Coplanaires	

Exemple

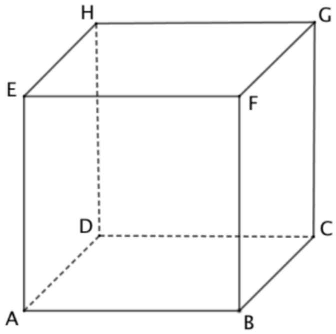


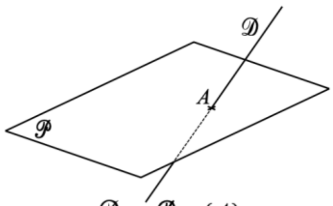
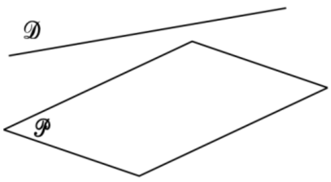
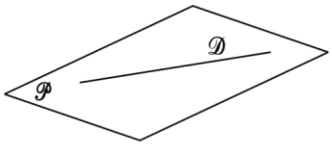
- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles (donc coplanaires).
- Les droites (EF) et (EH) sont sécantes en E (donc coplanaires).
- Les droites (EF) et (CG) sont non coplanaires.

<table>
<tr><th colspan="3">Position relative de deux plans de l’espace</th></tr>
<tr>
<td>$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{D}$
L’intersection de deux plans sécants est une droite.</td>
<td>$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$
Les plans n’ont aucun point commun.</td>
<td>$\mathscr{P} = \mathscr{P}'$
Pour que deux plans soient confondus, il suffit qu’ils aient trois points communs non alignés.</td>
</tr>
<tr><td rowspan="2">Sécants</td><td>Disjoints (strictement parallèles)</td><td>Confondus</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parallèles</td></tr>
</table>

<u>**Exemple**</u>

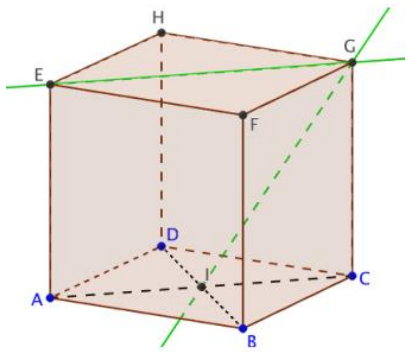
- Les plans (ABC) et (EGH) sont parallèles.
- Les plans (ADH) et (BCE) sont sécants selon la droite (EH).



<table>
<tr><th colspan="3">Position relative d’un plan et d’une droite de l’espace</th></tr>
<tr>
<td>$\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{A\}$
La droite et le plan ont un unique point commun</td>
<td>$\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$
La droite et le plan n’ont aucun point commun</td>
<td>$\mathscr{D} \subset \mathscr{P}'$
Pour qu’une droite soit incluse dans un plan, il suffit qu’ils aient deux points communs</td>
</tr>
<tr><td>Sécants</td><td colspan="2">Parallèles</td></tr>
</table>

<u>**Exemple**</u>

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



IV. Parallélisme dans l'espace

Propriété 1

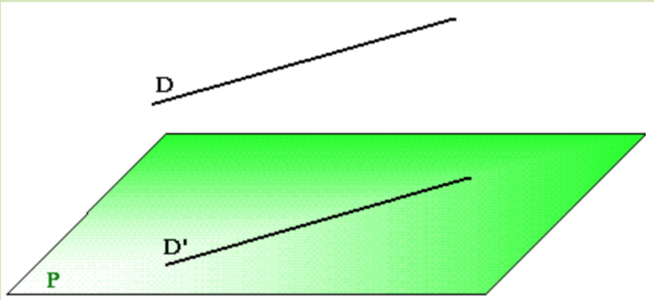
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Propriété 2

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.

Propriété 3

Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à au moins une droite de ce plan.

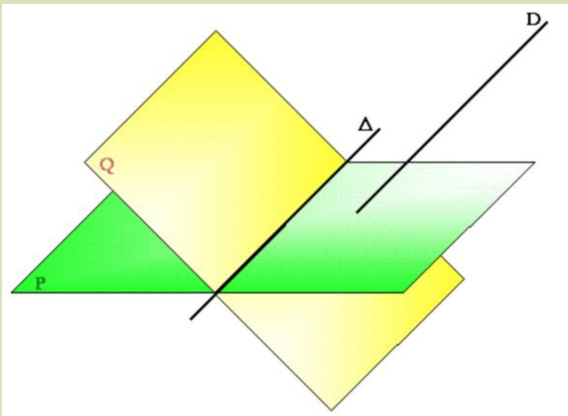


Remarque

Si $D // D'$ et $D' \subset P$ alors $D // P$

Propriété 4

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à l'intersection de ces deux plans.

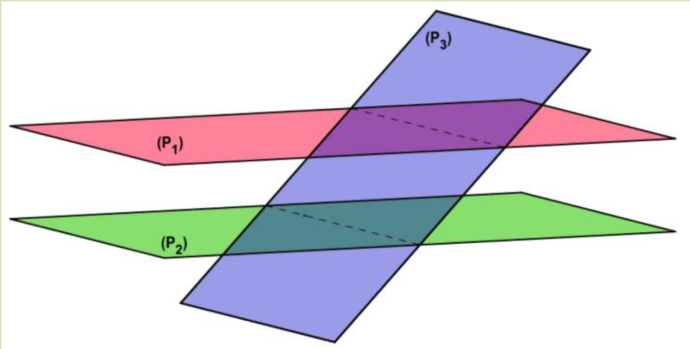


Propriété 5

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

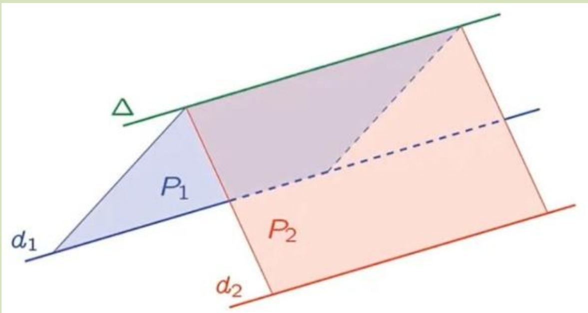
Propriété 6

Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, alors les droites d'intersection sont parallèles.



Théorème du toit

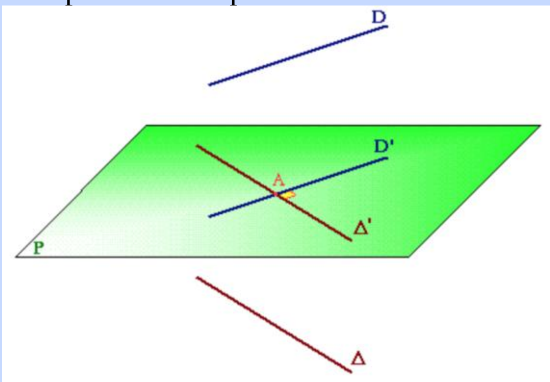
Si deux plans sécants P_1 et P_2 contenant respectivement 2 droites parallèles D_1 et D_2 , alors leur droite d'intersection Δ est parallèles à D_1 et D_2 .



V. Orthogonalité dans l'espace

Définition

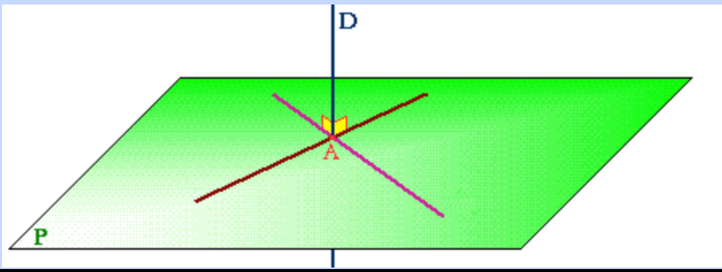
Deux droites D et Δ sont orthogonales lorsqu'il existe deux droites coplanaires et perpendiculaires D' et Δ' respectivement parallèles à D et Δ.



Remarque : deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

Définition

Une droite est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Propriété 1

Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété 2

Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.

Propriété 3

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Propriété 4

Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.

Propriété 5

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Application

Donner la position relative dans chacun des cas suivants :

1. Les droites (CD) et (EH)

2. Les plans (CFH) et (ABD)

3. La droite (AB) et le plan (CFH)

4. Les plans (CFH) et (BDE)