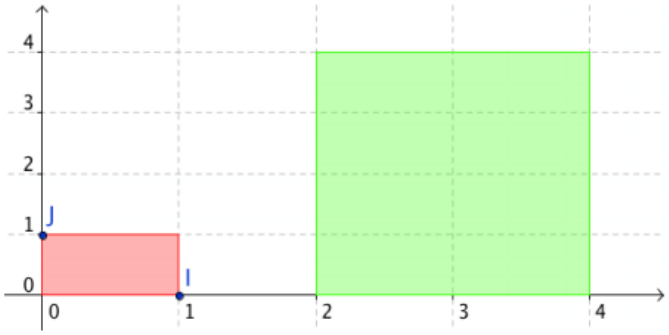
Chapitre 11 : Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue positive

1. Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.
Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.



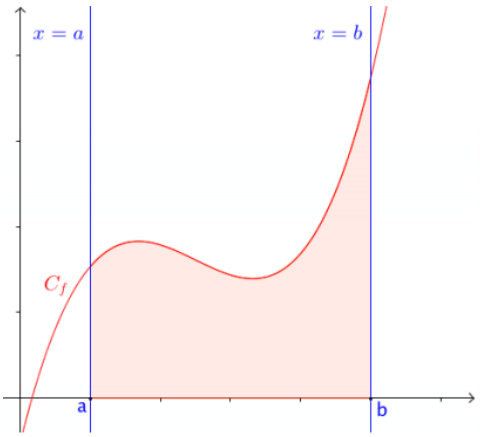
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2. Intégrale d'une fonction positive

Dans tout ce paragraphe, *f* et *g* sont des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$.
C_f est la courbe représentative de la fonction *f*.

Définition

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle intégrale de *f* sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre qui exprime l'aire, en ua, du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$.



Remarques

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de *a* à *b* de $f(x)dx$.
- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale et *x* est une variable muette ; elle n'intervient pas dans le résultat. On utilise aussi les lettres *t* et *u*. Ainsi, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Exercice 1

Calculer $I = \int_{-2}^{3} 3dx$, $J = \int_2^6 (x-2)dx$ et $K = \int_1^3 (5-x)dx$.

3. Intégrale d'une fonction de signes quelconques

Définition

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

On appelle intégrale de *f* sur $[a;b]$ le nombre $I = \int_a^b f(x)dx$ défini par :

- Si *f* est positive sur $[a;b]$: $I = \text{Aire}(E)$,
- Si *f* est négative sur $[a;b]$: $I = -\text{Aire}(E)$,

Où *E* est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exercice 2

Calculer $I = \int_2^5 (3-x)dx$.

4. Propriétés de l'intégrale

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* et *a*, *b*, *c* des réels de *I*.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)

II. Intégration et primitives

1. Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par : $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration dans le cas où f est strictement croissante

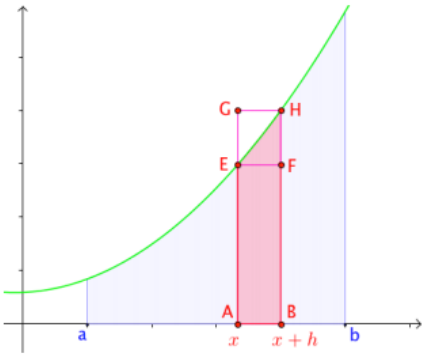
1er cas : $h>0$

On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a;b]$.

On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\\&=\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_x^a f(t)\,dt\\&=\int_x^{x+h}f(t)\,dt\end{aligned}$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.
Elle est comprise entre les aires des rectangles $ABFE$ et $ABHG$.
Or, $Aire(ABFE)=h\times f(x)$ et
$Aire(ABGH)=h\times f(x+h)$.



Comme f est croissante sur $[a;b]$, on a :
$h\times f(x)\le F(x+h)-F(x)\le h\times f(x+h)$.

Puisque $h>0$, on a : $f(x)\le\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\le f(x+h)$.

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

Et donc : $F'(x)=f(x)$.

F est donc une primitive de f.
Par ailleurs, F s'annule en a, car $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.

2ème cas : $h<0$

La démonstration est analogue, les encadrements sont inversés.

Exercice 3 : Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $[2;10]$ par : $F(x)=\int_2^x \frac{t}{2}dt$.

1. Étudier les variations de F sur $[2;10]$.

2. Déterminer l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

2. Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Démonstration

La fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$ d'après le premier théorème vu plus précédent.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a;b]$, on a : $G(x)=F(x)+k$, k un réel.
En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
De plus, $G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$ et $G(a)=F(a)+k$ donc $k=-F(a)$.
Or $G(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)+k=F(b)-F(a)$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence $F(b)-F(a)$.

Notation

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Exercice 4 : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

$A=\int_2^3\left(3x^2+2x-1\right)dx$ $B=\int_{-1}^1 e^{-2x}dx$ $C=\int_1^e \frac{dx}{x}$ $D=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

III. Inégalité et linéarité

1. Inégalité

Propriétés

Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I*, *a* et *b* deux réels de *I* avec $a\le b$.

- Si, pour tout *x* de $[a;b]$, $0\le f(x)$, alors $0\le\int_a^b f(x)dx$.
- Si, pour tout *x* de $[a;b]$, $f(x)\le g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

Exercice 5 : Encadrement d'une intégrale

1. Démontrer que pour tout *x* de $[0;1]$, on a : $0\le e^{x^2}\le e^x$.

2. En déduire que : $0\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e-1$.

2. Linéarité

Propriétés

Soit *f* et *g* 2 fonctions continues sur un intervalle *I*, *a* et *b* 2 réels de *I*.

- Pour tout réel *k*, on a : $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

Exercice 6

On pose : $A=\int_0^{2\pi}\cos^2 xdx$ et $B=\int_0^{2\pi}\sin^2 xdx$.

1. Calculer $A+B$ et $A-B$.

2. En déduire *A* et *B*.

3. Aire entre deux courbes

Propriété

Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I* telles que $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exercice 7 : Aire entre deux courbes

Déterminer l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g représentant les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admettra que pour tout $x \in [-1;2]$, $g(x) \ge f(x)$.

IV. Valeur moyenne d'une fonction

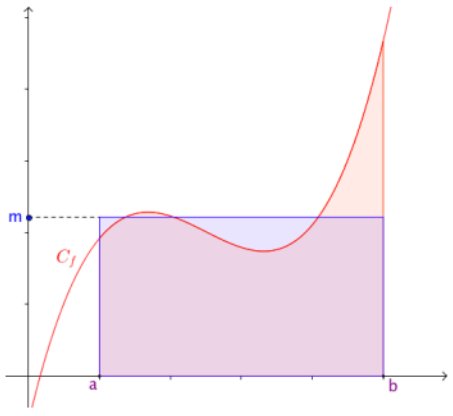
1. Définition

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \ne b$.

On appelle valeur moyenne de *f* sur $[a;b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2. Interprétation géométrique

Ce nombre correspond à la hauteur du rectangle de base $b-a$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe C_f sur l'intervalle $[a;b]$.



Exercice 8

Calculer la valeur moyenne de la fonction *f* définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ sur l'intervalle $[1;5]$.

V. Intégration par parties

Théorème

Soit *u* et *v* deux fonctions dérivables sur $[a;b]$.

Alors, on a : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Démonstration

On a $(uv)' = u'v + uv'$

Donc on a : $uv' = (uv)' - u'v$.

Par passage à l'intégrale, on a :

$\int_a^b (uv')(x)dx = \int_a^b \left[(uv)'(x) - (u'v)(x)\right]dx$

$\int_a^b (uv')(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b (u'v)(x)dx$

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Exercice 9 : Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

$A = \int_0^{\pi} x\cos x dx$ $\qquad$ $B = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ $\qquad$ $C = \int_1^e \ln x dx$

Exercice 10 : Suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier *n*, par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calculer I_0.

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.