11 : Calcul intégral

Exercice 1

On considère les fonctions $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $g(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Calculer A_1 l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

2. Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g.

3. Calculer A_2 l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Exercice 2

On considère une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		0		$2+e^{-3}$		2

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Interpréter graphiquement $g(3)$.

2. Montrer que $0\leq g(3)\leq 6{,}5$.

3. Soit *x* un réel supérieur à 3.

a. Montrer que $\int_3^x f(t)\,dt\geq 2(x-3)$.

b. En déduire que $g(x)\geq 2x-6$.

4. Déterminer la limite de la fonction *g* en $+\infty$.

5. a. Étudier le sens de variation de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.

b. Que vaut $g(0)$? En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ et on pose $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 sur $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ qui est définie sur $[0;+\infty[$ est une primitive de la fonction f_1.

d. Calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

b. Étudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.
a. Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0;+\infty[$.
Montrer alors que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel positif, on a :
$\ln(1+x^n) \leq x^n$.
En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
C désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Prouver que *C* admet deux asymptotes horizontales dont vous préciserez les équations.

2. λ désigne un nombre positif.
On note $V(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^{0}\pi\left[f(x)\right]^2 dx$. On admet que $V(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses de l'arc *C* obtenu pour $-\lambda\leq x\leq 0$.

a. Déterminer deux nombres *a* et *b* tels que pour tout *x* : $\dfrac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{ae^x}{e^x+1}+\dfrac{be^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

b. Exprimer $V(\lambda)$ en fonction de λ.

c. Calculer la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement ce résultat.