11 : vecteurs de l'espace

I. Vecteurs de l'espace

Les définitions et propriétés des vecteurs du plan s'étendent à l'espace.

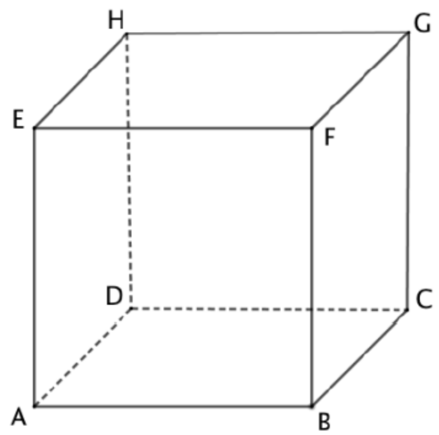
Définition : Combinaison linéaire de vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$, avec *a*, *b* et *c* des réels, est appelée combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Application 1

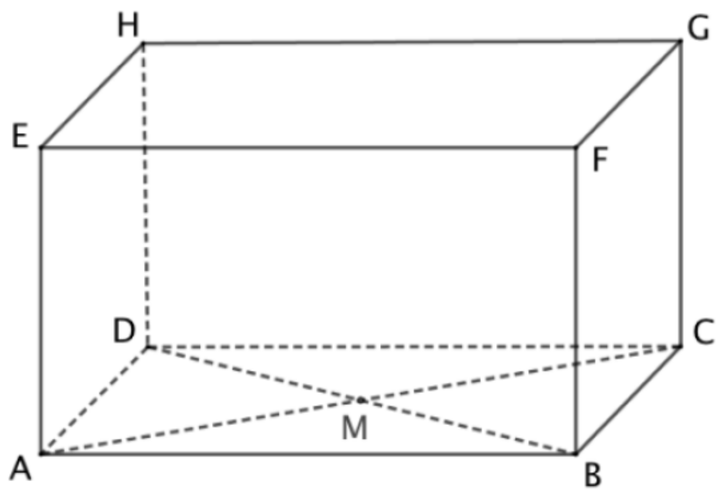
A l'aide du cube ci-dessous, représenter les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FH}$ $\quad$ $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{FC}$ $\quad$ $\vec{w}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{AC}$



Application 2

Dans le parallélépipède ci-dessous, *M* est le centre du rectangle *ABCD*.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Définition : Vecteurs colinéaires

2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Propriété

2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

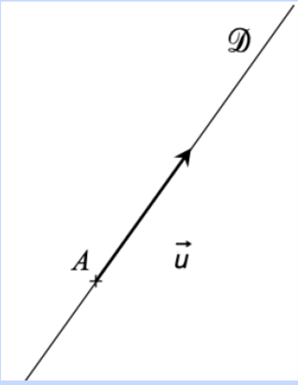
$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Définition : Vecteur directeur d'une droite

On appelle **vecteur directeur** d'une droite D tout vecteur non nul défini par deux points distincts de D.

On considère un point A de l'espace et un vecteur $\vec{u}$ non-nul.

$\left(A;\vec{u}\right)$ représente la droite passant par A et de direction celle de $\vec{u}$.

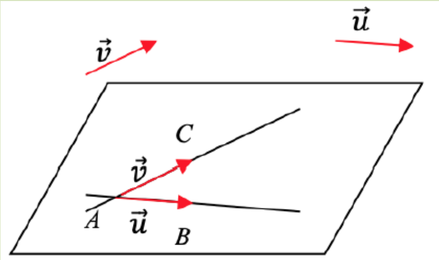


Remarques :

- La droite $\left(A;\vec{u}\right)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, autrement dit $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, autrement dit $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Propriété

- Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
- On note $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ ce plan. $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
- On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ ou que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est une base du plan (ABC).



Définition : Vecteurs coplanaires

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsqu'ils possèdent des représentants dans un même plan.

Remarque : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Théorème

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a et b tels que :

$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

Application 3

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Propriété

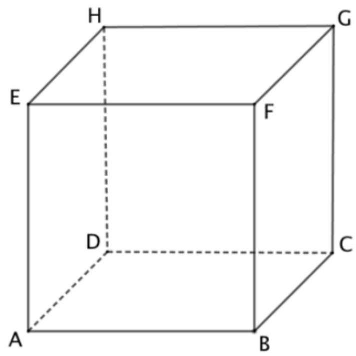
Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.
On appelle base de l'espace le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Application 4

ABCDEFGH est un cube.



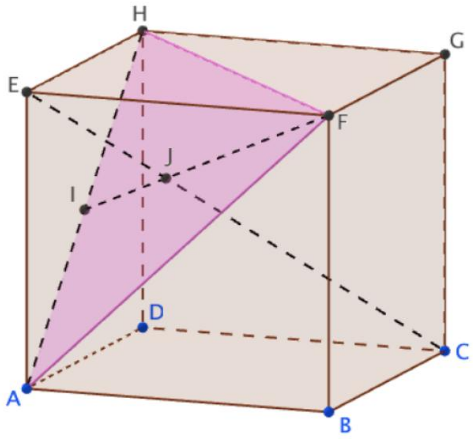
1. Expliquer pourquoi $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace.

2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

Application 5

ABCDEFGH est un cube.

Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point tel que $\overrightarrow{FJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.



Montrer que les points E, J et C sont alignés.

Aide : montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Définition : Repère de l'espace

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires et O un point de l'espace.
On appelle repère de l'espace le quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Remarques

- O est appelé origine du repère.
- La décomposition $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ donne les coordonnées x, y et z du point M.
  x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M et z est la cote de M.
- De même, la décomposition $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

On retrouve dans l'espace, des propriétés déjà connues dans le plan, comme les suivantes :

Propriétés

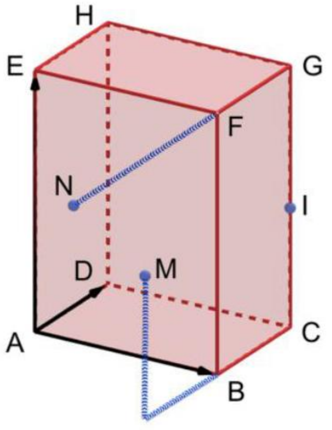
Soit deux points de l'espace $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
- Le milieu de segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Application 6

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[CG]$

Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF}=2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CI}$.



1. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ donner les coordonnées de tous les points.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.

3. Démontrer que M est le milieu de $[BN]$.

Application 7

On donne les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;-1)$ et $D(13;-16;5)$.

Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.