

12 : Orthogonalité de l'espace

I. Produit scalaire de deux vecteurs

La notion du produit scalaire dans l'espace prolonge celle du plan vue en classe de 1^{ère}.

Définition : Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est tel que :

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriétés algébriques

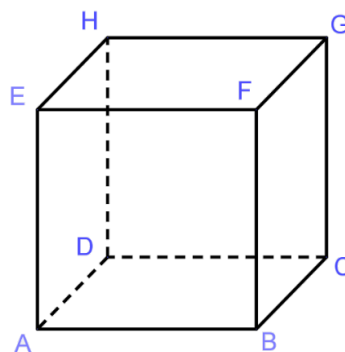
- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinearité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$, $k \in \mathbb{R}$
- Identités remarquables :
 $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ On peut écrire : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
 $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- Formules de polarisation :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Propriété : Orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

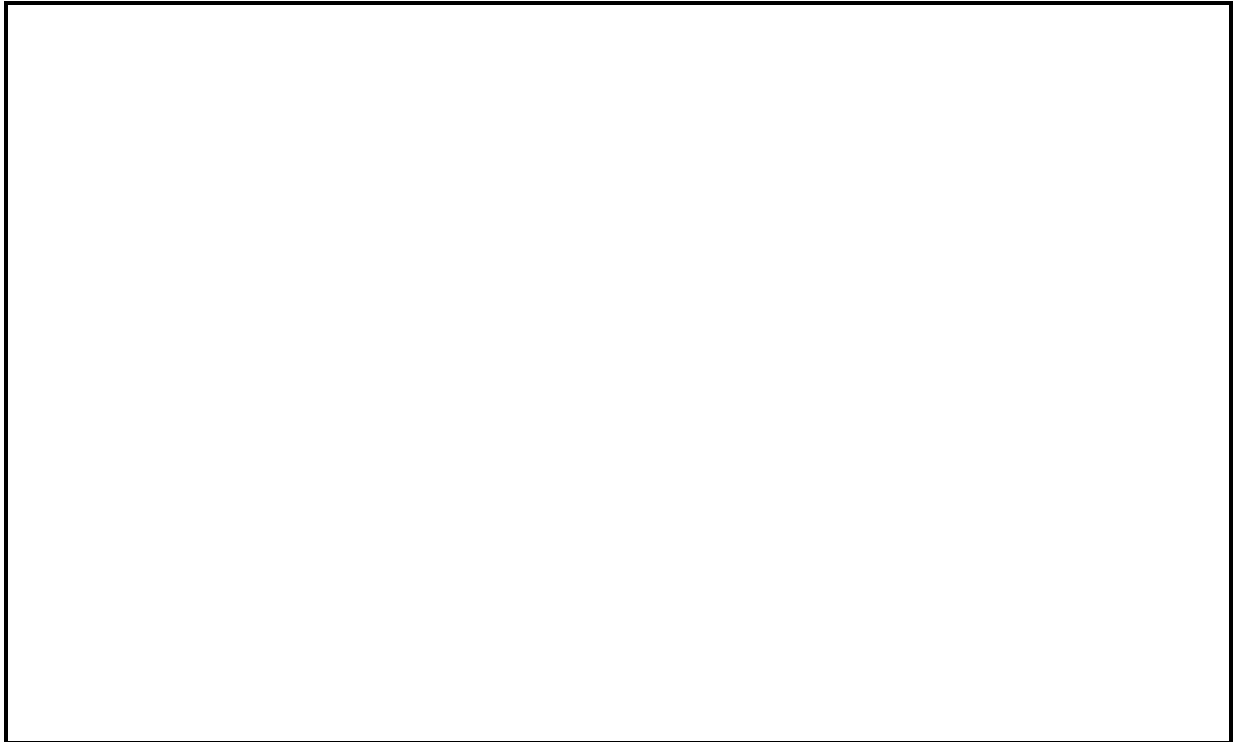
Application 1

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .



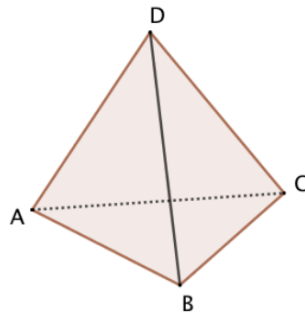
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$ 2. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{HD}$ 3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GF}$



Application 2

Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur a .



Démontrer que les arêtes $[BD]$ et $[AC]$ sont orthogonales.

II. Produit scalaire et repère orthonormé

Définition

Un repère est orthonormé si ses vecteurs de base sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.

Propriétés

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé de l'espace.

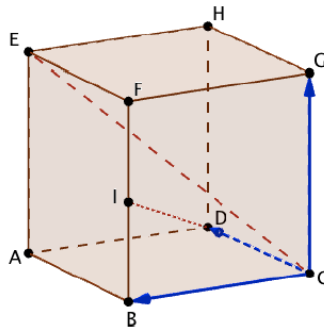
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère orthonormé de l'espace.

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Application 3

On considère le repère de l'espace $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.

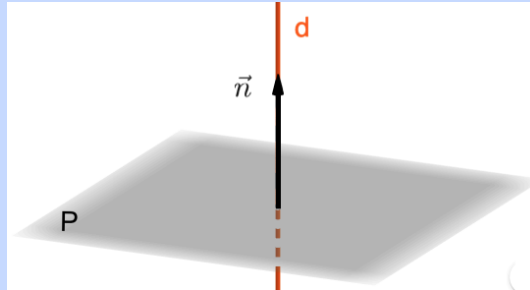


I est le milieu du segment $[BF]$. Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?

III. Vecteur normal à un plan

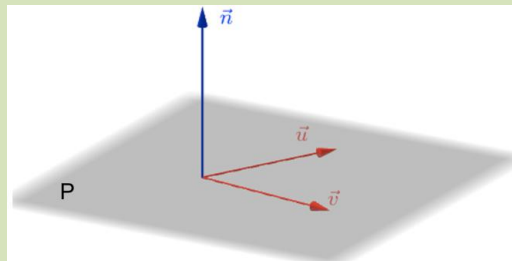
Définition : Vecteur normal

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P .



Propriété 1

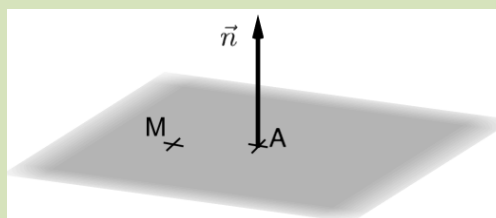
Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P , s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P .



Propriété 2

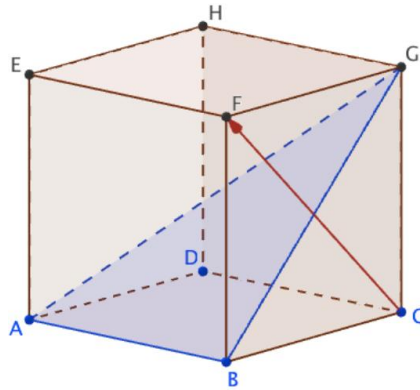
Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.

L'ensemble des points M tels $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Application 4

$ABCDEFGH$ est un cube. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG) .



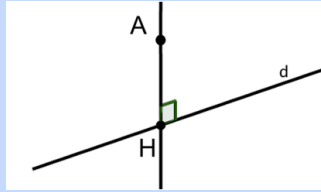
Application 5

ans un repère orthonormé, on donne : $A(1; 2; -2)$, $B(-1; 3; 1)$ et $C(2; 0; -2)$.

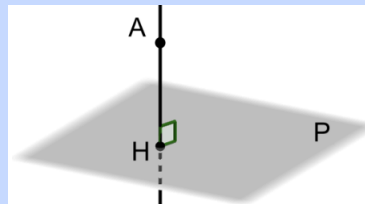
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

Définition : Projection orthogonale

- Soit un point A et une droite d de l'espace.
Le projeté orthogonal du point A sur la droite d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d .

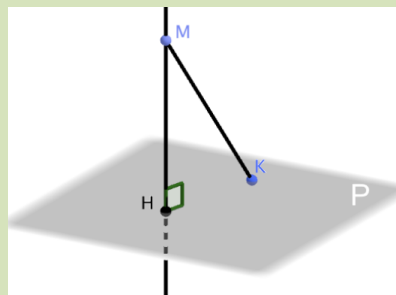


- Soit un point A et un plan P de l'espace.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P .



Propriété

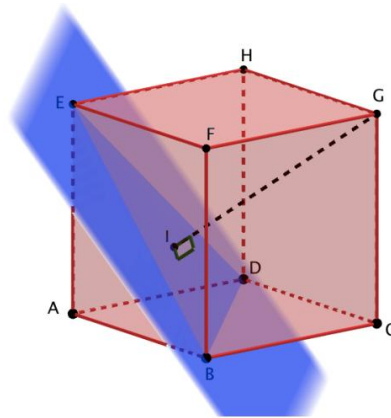
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point H de P le plus proche de M .



Application 6

Soit un cube $ABCDEFGH$.

On considère le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal I du point G sur le plan (BDE) .
2. En déduire la distance du point G au plan (BDE) .

IV. Equation cartésienne d'un plan

Propriété

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Application 7

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(1; 2; -3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Application 8

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0 \text{ et } 2x - 5y + 4z - 1 = 0.$$

Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

V. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite d passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a : $M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite d .

Exemple

La droite passant par $A(2; -1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ a pour représentation

paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Application 9

Soit $A(2; -3; 1)$ et $B(5; -3; -2)$.

1. Déterminer la représentation de la droite (AB) .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Application 10

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

Soit $A(1; 2; -3)$ et $B(-1; 2; 0)$

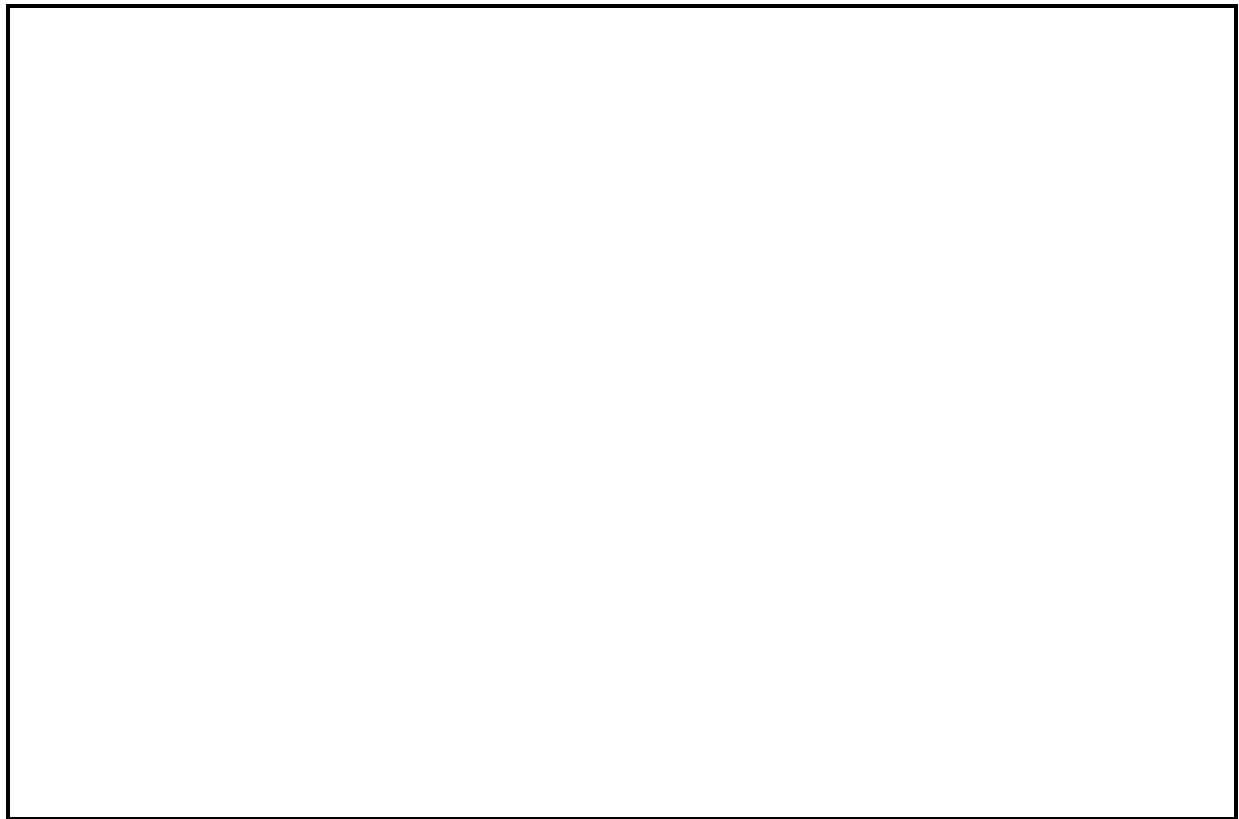
1. Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2. Déterminer leur point d'intersection.

Application 11

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne :

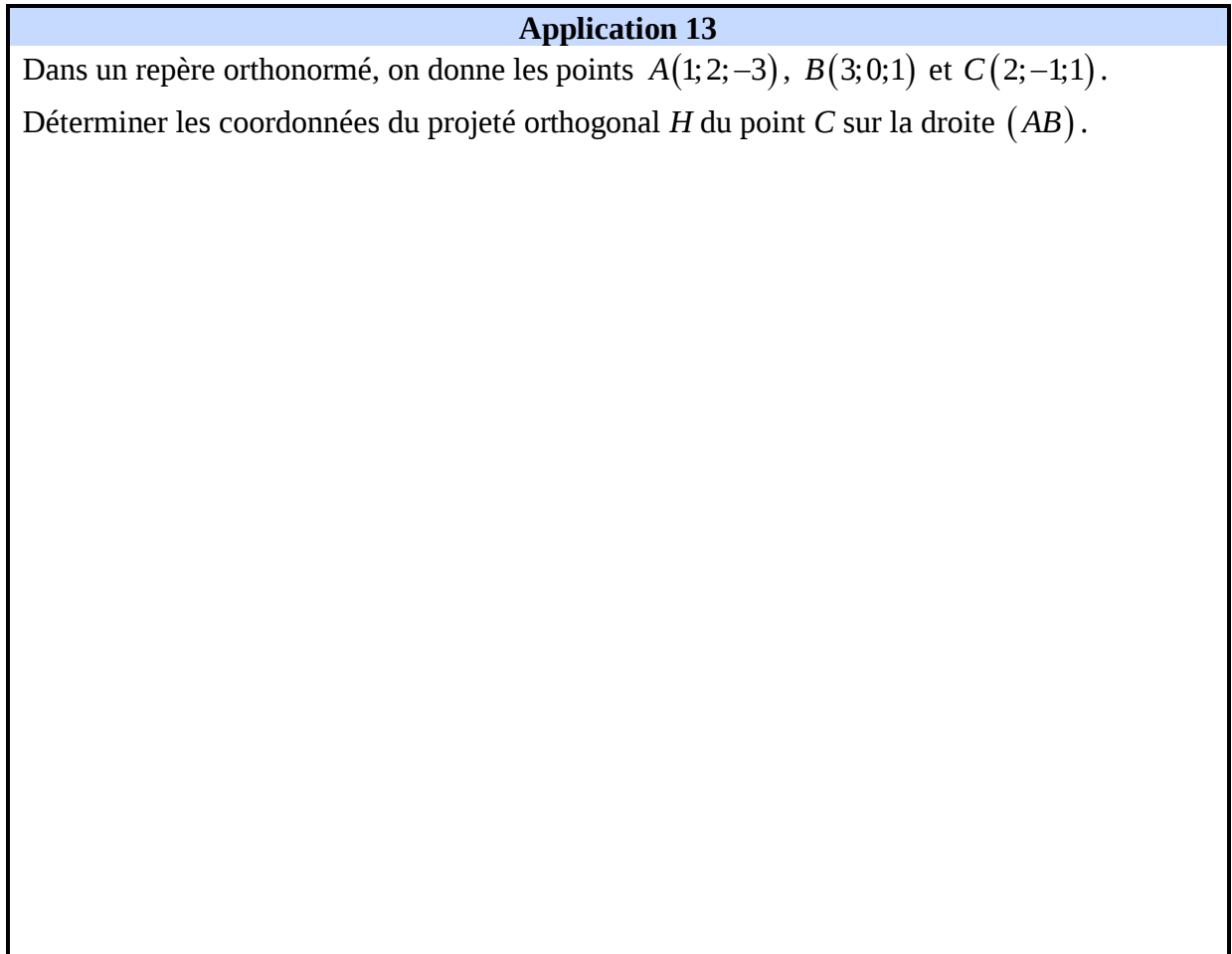
$A(0; 1; -1)$, $B(2; 1; -2)$ et $C(1; 0; -2)$.

1. Démontrer que les points déterminent un plan.
2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal du plan (ABC) .
3. Déterminer une équation du plan (ABC) .
4. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (ABC) passant par $D(-1; 2; 1)$.



Application 13

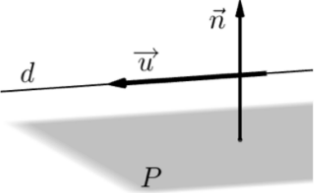
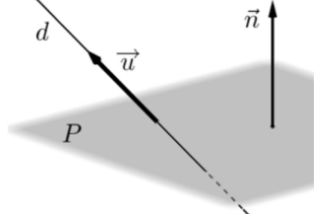
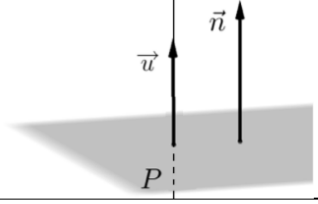
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 2; -3)$, $B(3; 0; 1)$ et $C(2; -1; 1)$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB) .



Résumé : Pour démontrer des positions relatives

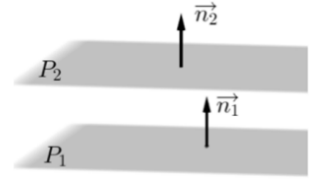
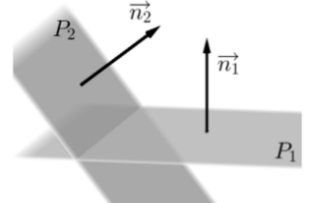
- d droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
 P plan de vecteur normal $\vec{n}$.

d et P sont...

parallèles	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	
sécants	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	
orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires	

- P_1 plan de vecteur normal $\vec{n}_1$.
 P_2 plan de vecteur normal $\vec{n}_2$.

P_1 et P_2 sont...

parallèles	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires	
sécants	$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires	
perpendiculaires	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	