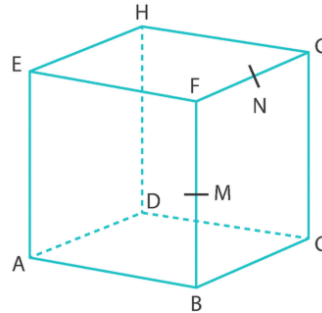


12 : Orthogonalité dans l'espace

Exercice 1

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a , où M est le milieu de $[FB]$ et N celui de $[FG]$.



1. Montrer que $EM = EN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}$.
On introduira le point F grâce à la relation de Chasles.
3. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{MEN}$ arrondie au centième.

Exercice 2

On considère les plans P et P' d'équations cartésiennes $x - y + 2z - 1 = 0$ et $2x - z = 0$.

1. Donner un vecteur directeur normal à chaque plan.
2. En déduire leur position relative.

Exercice 3

Soient $A(-1; 3; 1)$ et $B(0; 5; -3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

Le plan médiateur à un segment est le plan qui passe par le milieu du segment et qui lui est orthogonal.

Exercice 4

L'espace étant rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2; 0; 2)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 3; 1)$ et $D(4; 4; 6)$.

1. Démontrer que ABC est un triangle rectangle en B .
2. Montrer que $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal du plan (ABC) .
3. En déduire une équation du plan (ABC) .
4. Soit P le plan contenant la droite (BC) et perpendiculaire au plan (ABC) .
Déterminer une équation du plan P .

Exercice 5

1. Déterminer l'équation du plan P de vecteur normal $\vec{n}(1;5;0)$ passant par $A(3;-1;-1)$.
2. Déterminer l'équation du plan P' passant par $B(2;-1;6)$ et de vecteurs de base $\vec{u}(4;1;0)$ et $\vec{v}(5;0;-2)$.
3. Déterminer l'équation du plan (CDE) avec $C(2;0;-5)$, $D(-1;1;0)$ et $E(4;3;-1)$.

Exercice 6

On considère deux trajectoires rectilignes d'avions, dont la première a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La deuxième trajectoire passe par le point $A(-11;10;4)$ et est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique possible de la deuxième trajectoire.
2. Les deux avions peuvent-ils se percuter ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'impact.

Exercice 7

On considère les points $A(3;0;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;4)$ et $D(-5;0;1)$ dans l'espace, ramené à un repère orthonormé.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonal à (ABC) et passant par D .
4. En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .
5. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

Exercice 8 : Amérique du nord 13

On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

d. Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .

3. Soient P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Vérifier que la droite d , intersection des plans P_1 et P_2 a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 9 - Amérique du nord J1 – Mai 25

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On considère également les points suivants :

- $A(3; -3; -2)$
- $B(5; -4; -1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan P d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 10 : Centres étrangers J2 – Juin 25

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère les points $A(1;0;3)$, $B(-2;1;2)$ et $C(0;3;2)$.

1. a. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) .

c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan P d'équation cartésienne $3x - 3x + 2z - 9 = 0$ et le plan P' d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. a. Démontrer que les plans P et P' sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

b. Déterminer si les plans P et P' sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point $M(2;1;3)$ appartient aux plans P et P' . En déduire une représentation paramétrique de la droite (d) .

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC) .

Que peut-on dire des trois plans (ABC) , P et P' ?