

13 : Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue positive

1. Unité d'aire

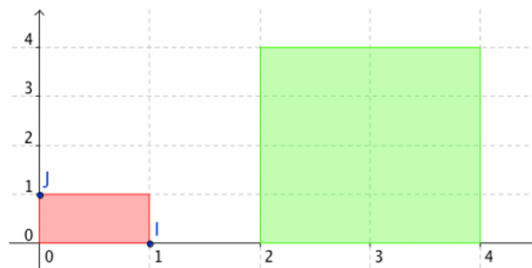
Introduction

Dans le repère (O, I, J) , le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.
Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 **unité d'aire**. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



2. Intégrale d'une fonction positive

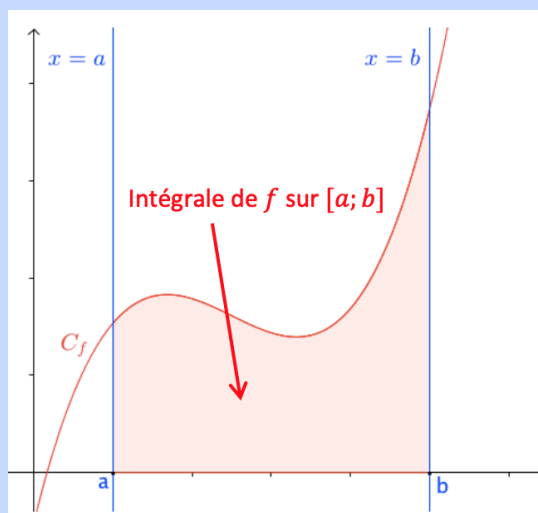
Dans tout ce paragraphe, f et g sont des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$.
 C_f est la courbe représentative de la fonction f .

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$ le nombre qui exprime l'aire, en ua, du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$.

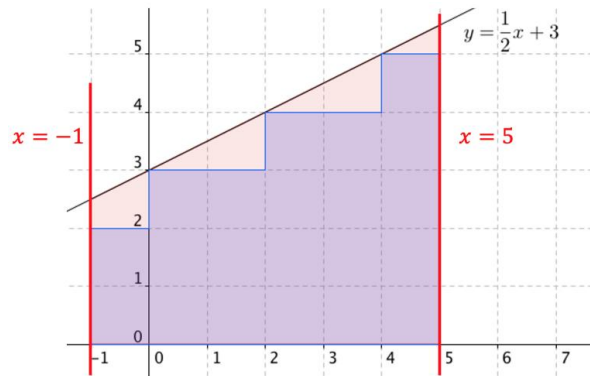


Remarques

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$.
- a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette ; elle n'intervient pas dans le résultat. Ainsi on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
- dx nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Application 1

1. Calculer $A = \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) dx$ à partir du graphique suivant :



2. Calculer $I = \int_{-2}^3 3dx$, et $J = \int_1^3 (5-x)dx$.

3. Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive et croissante

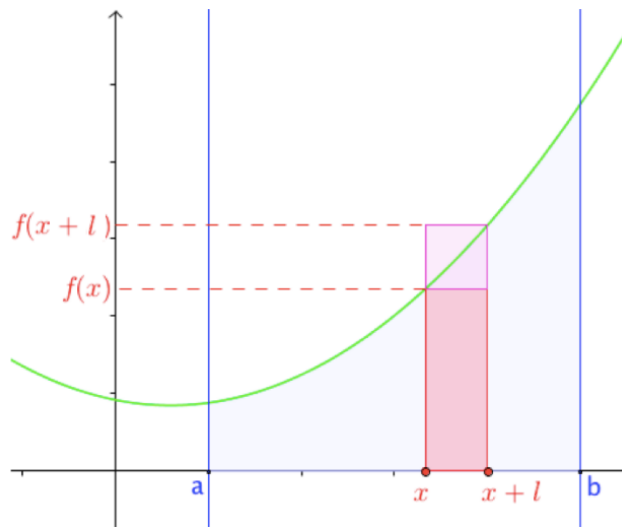
Méthode des rectangle

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a; b]$

On partage l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x; x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- L'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire : $l \times f(x)$;
- L'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire : $l \times f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage python permettant d'obtenir un tel encadrement pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[a; b]$

```
from math import
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

Si l'intervalle est $[1; 2]$ et on choisit $n = 100$ on obtient :

```
>>>rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.348350000000003)
>>>
```

On peut en déduire que $2,31 < \int_1^2 x^2 dx < 2,35$.

A la TI Nspire : Menu 4 – 3

On trouve : $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3} \approx 2,33$

4. Intégrale d'une fonction négative

Propriété

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire, en ua, du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\int_a^b f(x) dx$.

5. Propriétés de l'intégrale

Propriétés

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ (Relation de Chasles)

Application 2

En considérant des calculs d'aires, calculer $\int_1^5 (2 - x) dx$.

II. Intégrale et primitives

1. Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Conséquence

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Application 3

Soit f la fonction définie sur $[2; 10]$ par : $F(x) = \int_2^x \frac{t}{2} dt$.

1. Étudier les variations de F sur $[2; 10]$.
2. Déterminer l'expression de $F(x)$ en fonction de x .

2. Calcul d'intégrales

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration

La fonction G définie sur $[a; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$ d'après le premier théorème vu plus précédent.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a; b]$, on a : $G(x) = F(x) + k$, k un réel.

En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $k = -F(a)$.

Or $G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a; b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Application 4

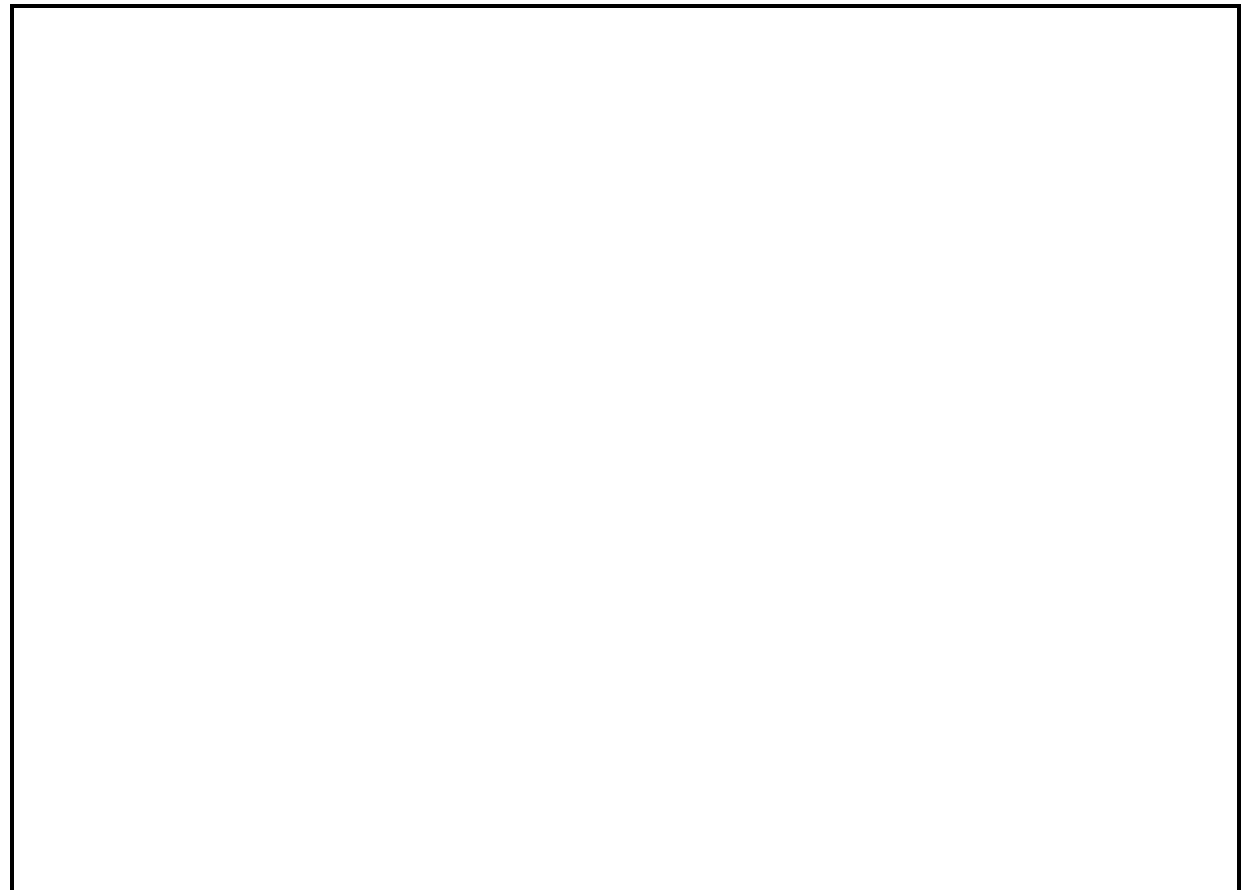
Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_2^3 (3x^2 + 2x - 1) dx$$

$$B = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$C = \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$D = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$



III. Propriétés des intégrales

1. Linéarité

Propriété

- Pour tout réel k , on a : $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Application 5

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

1. Calculer $A + B$ et $A - B$.

2. En déduire A et B .



2. Inégalité

Propriété

Pour tout x de $[a; b]$.

- Si $0 \leq f(x)$ alors $0 \leq \int_a^b f(x) dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Application 6

1. Démontrer que pour tout x de $[0; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
2. En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

IV. Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$.

Alors, on a : $\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$

Remarque

Dans une intégration par parties, on dérive en priorité :

Logarithme – Polynôme – Exponentielle - Trigonométrie

Application 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

$$B = \int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx$$

$$C = \int_1^e \ln(x) dx$$



V. Applications du calcul d'intégrale

1. Aire entre deux courbes

Application 8

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout $x \in [-1; 2]$, $g(x) \geq f(x)$.

Déterminer l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g .

2. Valeur moyenne d'une fonction

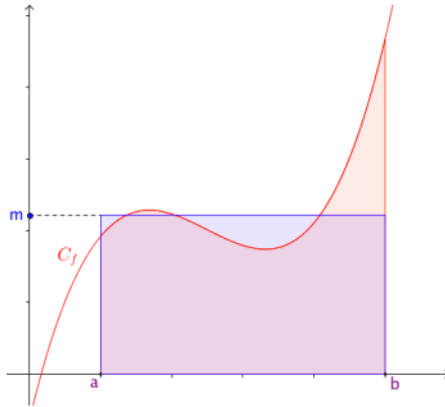
Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation géométrique

Ce nombre correspond à la hauteur du rectangle de base $b - a$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe C_f sur l'intervalle $[a; b]$.



Application 9

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ sur l'intervalle $[1; 5]$.

Application 10

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie. Au n -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égal à $f(x) = 16x^2 - x^3$. Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

3. Suites et intégrales

Application 10

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n , par : $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$

1. Calculer I_0 .

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.