

13 : Calcul intégrales

Exercice 1

Donner un encadrement de $\int_1^6 f(x) dx$ à l'aide de la représentation graphique ci-contre.



Exercice 2

Encadrer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \cos^2(t) dt$$

$$B = \int_{-1}^1 x^2 dx$$

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $[3;4]$ telles que :

$$\int_3^4 f(x) dx = 5 \text{ et } \int_3^4 g(x) dx = 8. \text{ Calculer les intégrales suivantes :}$$

$$1. \int_3^4 [f(x) + g(x)] dx \quad 2. \int_3^4 3f(x) dx \quad 3. \int_3^4 \left[\frac{2}{5} f(x) - \frac{1}{4} g(x) \right] dx$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^2 x^2 dx$$

$$B = \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$C = \int_0^\pi \sin(t) dt$$

$$D = \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$E = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$$

$$F = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$G = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-2x} dt$$

Exercice 6

En remarquant que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$

Exercice 7

Déterminer la valeur moyenne sur $[0;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 8

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. Calculer $I = \int_0^4 f(x) dx$.
2. On pose $J = \int_0^4 g(x) dx$. Calculer $I + J$.
3. En déduire J .

Exercice 9

Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
On pourra étudier le signe de la fonction dérivée seconde de la fonction f .
2. Justifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;1]$, on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.
3. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 \cos(x) dx$.

Exercice 11

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 2 \text{ et } g(x) = x^2 + 4x + 3$$

1. Justifier que, sur l'intervalle $[-3;2]$, $f(x) \geq g(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 2$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$. La fonction f est dérivable donc continue sur $]0; +\infty[$. On peut alors considérer la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

1. Pour tout nombre entier naturel n non nul, interpréter géométriquement u_n .
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13

A l'aide d'une intégration par partie, calculer les valeurs des trois intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 x \ln(x) dx \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(x) dx \quad C = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

Exercice 14

A l'aide d'une double intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^2 e^x dx \quad B = \int_1^e x^2 \ln(x) dx \quad C = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Exercice 15

On pose $I = \int_0^{\pi} \cos(x) e^x dx$.

1. A l'aide d'une double intégration par partie, montrer que $I = -(e^{\pi} + 1) - I$.
2. Calculer I .

Exercice 16 : Nouvelle Calédonie J1 – Nov. 25

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.
- b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
- b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction suite() :

```
from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction suite(n) renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 17 : Amérique du sud J2 – Nov. 24

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n$.
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2 .

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe C_f de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D .

