13 : Variables aléatoires et lois des grands nombres

I. Somme de variables aléatoires

Exemple

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :
* pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
* pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs -2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X=1)\cap(Y=-2)$ signifie qu'on a gagné 1€ au premier jeu et perdu 2€ au deuxième jeu.

Considérons la variable aléatoire somme $X+Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux. Alors la variable aléatoire $X+Y$ peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple $X+Y=0$ avec $(X=2)\cap(Y=-2)$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X+Y=5$, on cherche toutes les sommes $X+Y$ égales à 5.
On a ainsi : $P(X+Y=5)=P\big((X=1)\cap(Y=4)\big)+P\big((X=2)\cap(Y=3)\big)$.

Si de plus, les évènements X et Y sont indépendants, alors on a :

$$P(X+Y=5)=P(X=1)\times P(Y=4)+P(X=2)\times P(Y=3)$$

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires.
La loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X+Y$ est donnée par :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i)\cap P(Y=j)$$

Si de plus les évènements $(X=i)$ et $(Y=j)$ sont indépendants, alors on a :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i)\times P(Y=j)$$

On dit dans ce cas que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exemple

Si par exemple, $k=2$ alors :

$$P(X+Y=2)=P(X=2)\times P(Y=0)+P(X=1)\times P(Y=1)+P(X=0)\times P(Y=2)$$

Exercice 1 : Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La première partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur pile, on gagne 1€. Si on tombe sur face, on gagne 2€.
- La deuxième partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair on gagne 1€, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2€, si on tombe sur le « 1 » on perd 5€.

La variable aléatoire X désigne les gains à la première partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la deuxième partie.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Correction

Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :

Y \ X	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} P(S=-4) &= P((X=1)\cap(Y=-5)) \\ &= P(X=1)\times P(Y=-5) \text{ en effet, les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=-3) &= P(X=2)\times P(Y=-5) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=2) &= P(X=1)\times P(Y=1) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=3) &= P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=2)\times P(Y=1) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=4) &= P(X=2)\times P(Y=2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-4	-3	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

II. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

Propriété

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $V(aX+b)=a^2V(X)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Application

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=10$ et $V(X)=4$.

Soit Y une autre variable aléatoire telle que $E(Y)=0$ et $V(Y)=1$.

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

$Z=2X-15$ $\quad$ $T=X+Y$ $\quad$ $U=-5Y$

Correction

Par linéarité de l'espérance, on a $E(Z)=2E(X)-15=2\times 10-15=5$.
$V(Z)=2^2V(X)=16$.

Par linéarité de l'espérance, on a $E(T)=E(X)+E(Y)=10+0=10$.
En l'absence d'information sur l'indépendance des expériences aléatoires associées aux variables X et Y, on ne peut appliquer la formule sur la variance de la somme. On ne peut donc pas déterminer $V(T)$.

Par linéarité de l'espérance, on a $E(U)=-5E(Y)=0$ et $V(U)=(-5)^2V(Y)=25\times 1=25$.

Exercice 2 : Simplifier les calculs d'espérance et de variance

Une entreprise qui fabrique des roulements à billes fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm, mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Aide : Poser $Y=1000X-1300$

Correction

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

y_i	-2	-1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y) = -2 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}1$
$V(Y) = 0{,}2 \times (-2 - 0{,}1)^2 + 0{,}1 \times (-1 - 0{,}1)^2 + 0{,}2 \times (0 - 0{,}1)^2 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}1)^2$
$+0{,}1 \times (2 - 0{,}1)^2$
$= 1{,}69$

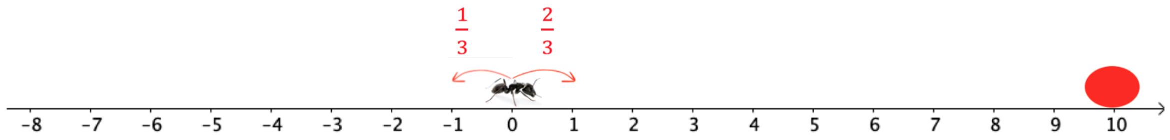
On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000E(X) - 1300$
Donc : $E(X) = \frac{E(Y)+1300}{1000} = \frac{0{,}1+1300}{1000} = 1{,}3001$
$V(Y) = V(1000X - 1300) = 10002\, V(X)$
Donc : $V(X) = \frac{V(Y)}{1000^2} = \frac{1{,}69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1{,}69}{1000^2}} = \frac{1{,}3}{1000} = 0{,}0013$

Conclusion : $E(X) = 1{,}3001\ cm$ et $\sigma(X) = 0{,}0013\ cm$.

Exercice 3 : Calculer une espérance et une variance à l'aide d'une somme de variables aléatoires

Sur un axe gradué, on dépose une petite goutte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10. Moshé pose une fourmi sur l'origine de l'axe gradué. Attirée par la confiture, la fourmi se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au n-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ la variable aléatoire somme des X_i.



1. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

3. Au bout de combien de déplacements, la fourmi peut-elle espérer théoriquement atteindre la goute de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

Correction

1) On établit la loi de probabilité de X_k :

x_i	-1	1
$P(X_k = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$E(X_k) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$V(X_k) = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

2) On a : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Donc la variable aléatoire S_n donne l'abscisse de la fourmi après n déplacements.

Et on a : $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

$= nE(X_k)$

$= \frac{n}{3}$

Et : $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$, car les variables sont indépendantes.

$= nV(X_k)$

$= \frac{8n}{9}$

3) $E(S_n) = 10$

$\frac{n}{3} = 10$

$n = 30$

Après 30 déplacements, Sophie peut espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture.

$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{\frac{8 \times 30}{9}} \approx 5{,}2$ unités.

Propriété : Espérance, variance et écart type pour une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$E(X) = np$ $\quad V(X) = np(1-p)$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice 4 : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour une loi binomiale

On lance 5 fois de suite un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Correction

La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

$E(S) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$

$V(S) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

$\sigma(S) = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

En moyenne, on peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

III. Inégalité de concentration

Propriété : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire d'espérance 1. Alors $P(X \geq 100) \leq 0{,}01$

Propriété : Inégalité de Bienaymé Tchébychev

Soit X une variable aléatoire et soit t un nombre réel strictement positif. On a :

$$P(|X - E(\geq t)|) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Application

Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.
Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse sur une journée 75 pièces.

Correction

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces fabriquées un jour donné.
On cherche à majorer $P(X \geqslant 75)$.
D'après l'inégalité de Markov, avec $a = 75$, on a $P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75}$.

Or $\frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$, ce qui donne une première majoration : $P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{2}{3}$.

Une seconde majoration peut être obtenue à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour cela, on fait apparaître la bonne « forme » : on dit que l'on centre la variable X en lui retranchant son espérance.

$P(X \geqslant 75) = P(X - 50 \geqslant 25) \leqslant P(|X - 50| \geqslant 25)$

Or $P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \frac{V(X)}{25^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Donc $P(X \geqslant 75) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant 25) \leqslant \frac{V(X)}{25^2} = \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25}$.

On a donc $P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{1}{25}$ ce qui est une seconde majoration.

Remarque : Il apparaît clairement ici que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une majoration bien plus précise que l'inégalité de Markov. On privilégiera en général l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

IV. Loi des grands nombres

Définition

On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes.
On note $X_1, X_2, ..., X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.

On note : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$

M_n s'appelle la moyenne empirique des variables $X_1, X_2, ..., X_n$.

Théorème : Loi des grands nombres

On considère une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience, d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

On répète n fois cette expérience de manière indépendante. On obtient un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$.

Les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ ont la même loi (elles ont donc la même espérance $E(X)$ et la même variance $V(X)$).

Pour tout nombre réel $t > 0$, $P(|M_n - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{nt^2}$

Autrement dit, on a $\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Application

Soit une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 0,2.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
1. Déterminer un majorant de $P(|M_n - 3| \geq 0,1)$ $P(|M_n - 3| \geq 0,1)$ pour $n = 100$, pour $n = 1000$, puis pour $n = 10000$. Que constate-t-on ?
2. Démontrer et interpréter le résultat précédent.

Correction

1. On sait que : $P(|M_n - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{nt^2}$
Ici on a : $P(|M_n - 3| \geq 0,1) \leq \frac{0,2}{n0,1^2}$
Plus simplement on a : $P(|M_n - 3| \geq 0,1) \leq \frac{20}{n}$
Pour $\mathrm{n} = 100$, $P(|M_n - 3| \geq 0,1) \leq \frac{20}{100} = 0,2$
Pour $n = 1000$, $P(|M_n - 3| \geq 0,1) \leq \frac{20}{100} = 0,02$
Pour $n = 10\,000$, $P(|M_n - 3| \geq 0,1) \leq \frac{20}{100} = 0,002$

On constate que plus n est grand plus la probabilité $P(|M_n - 3| \geq 0,1)$ se rapproche de 0.

2. D'après la loi des grands nombres, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$

Soit, dans le contexte de l'exercice : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 3| \geq t) = 0$

Plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'écart entre la moyenne M_n et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Exercice bac : Métropole J2 – juin 24

On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires $N_1, N_2, ..., N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + ... + N_{10}$.
5. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.
a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

Correction

5. Comme les dix variables aléatoires suivent la même loi binomiale de paramètres 20 et 0,615, chacune de ces variables aléatoires a

- pour espérance : $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$;
- et pour variance : $V(N_i) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

S étant la somme de ces dix variables aléatoires, on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 12,3 + 12,3 + \ldots + 12,3 = 123$;
- comme les variables aléatoires sont indépendantes,
  $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6. **a.** La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un groupe (un échantillon) de 10 étudiants choisis au hasard.

b. On a bien

- $E(M) = \dfrac{1}{10} \times E(S) = \dfrac{1}{10} \times 123 = 12,3$;
- $V(M) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \dfrac{1}{100} \times 47,355 = 0,47355$.

c. On remarque que l'intervalle de notes considéré : $]10,3\ ;\ 14,3[$ est un intervalle centré sur l'espérance de M, autrement dit, la probabilité qui nous intéresse est celle de l'évènement : $A = \{|M - E(M)| < 2\}$.
L'évènement contraire de cet évènement est : $\overline{A} = \{|M - E(M)| \geqslant 2\}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que :

$$\begin{aligned} P\big(|M - E(M)| \geqslant 2\big) \leqslant \frac{V(M)}{2^2} &\iff P\big(|M - 12,3| \geqslant 2\big) \leqslant \frac{0,47355}{4} \\ &\iff P\big(|M - 12,3| \geqslant 2\big) \leqslant 0,1183875 \\ &\iff P\big(|M - 12,3| < 2\big) \geqslant 1 - 0,1183875 \\ &\iff P\big(|M - 12,3| < 2\big) \geqslant 0,8816125 \end{aligned}$$

L'affirmation « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % » est donc bien correcte, la probabilité que cet évènement soit réalisé étant supérieure à 0,88, elle est aussi supérieure à 0,8 qui correspond à 80 %.

Exercice bac : Métropole J2 (dévoilé) – juin 24

Une société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions. On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé.
On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée. On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Correction

1. La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc son espérance $E(X_2)$ est égale à $np = 1\,000 \times 0,47 = 470$.

   Cela signifie qu'en moyenne, sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en aura 470 qui ont acheté la carte de fidélité.

2. La variable Z représente la moyenne par client des montants offerts aux 1 000 clients.

   - On utilise la linéarité de l'espérance.
     $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$ donc $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000}$, et $Y = Y_1 + Y_2$ donc $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2)$.
     De plus, $Y_2 = 50X_2$ donc $E(Y_2) = 50E(X_2) = 50 \times 470 = 23\,500$
     On sait que $E(Y_1) = 30\,000$.
     On en déduit que : $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = 30\,000 + 23\,500 = 53\,500$, et donc que $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000} = \dfrac{53\,500}{1\,000} = 53,5$.
   - Les variables étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance.
     $V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2)$, $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2 V(X_2) = 2\,500 V(X_2)$, et $V(Z) = V\left(\dfrac{Y}{1\,000}\right) = \dfrac{V(Y)}{1\,000^2} = \dfrac{V(Y)}{10^6}$
     La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc sa variance $V(X_2)$ est égale à $np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times (1 - 0,47) = 249,1$.
     On en déduit que $V(Y_2) = 2\,500 V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$.
     On sait que $V(Y_1) = 100\,000$ donc
     $V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$.
     $V(Z) = \dfrac{V(Y)}{10^6} = \dfrac{722\,750}{10^6} = 0{,}722\,75$

3. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z) = 53,5$ et pour variance $V(Z) = 0{,}722\,75$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{\delta^2}$.

   $$\begin{aligned} 51,7 < Z < 55{,}3 &\iff 53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8 \iff -1,8 < Z - 53,5 < 1,8 \\ &\iff \left|Z - 53,5\right| < 1,8 \end{aligned}$$

   En remplaçant $E(Z)$ et $V(Z)$ par leurs valeurs, et en prenant $\delta = 1,8$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient : $P\left(\left|Z - 53,5\right| \geqslant 1,8\right) \leqslant \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2}$

   En considérant l'évènement contraire, on a : $P\left(\left|Z - 53,5\right| < 1,8\right) > 1 - \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2}$.

   $1 - \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2} \approx 0,777$

   Donc la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice bac : Métropole – Sept 24

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour *i* entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du *i*-ème cachet prélevé.
On considère la variable aléatoire *S* définie par : $S = M_1 + M_2 + ... + M_{100}$.
On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note *s* l'écart type de la variable aléatoire *S*.
Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

a. Montrer que cette condition est équivalente à : $P\left(\left|S-200\right| \geq 1\right) \leq ,1$.

b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Correction

1. Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$.

   $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}$

   On utilise la linéarité de l'espérance donc :

   $E(S) = E(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}) = E(M_1) + E(M_2) + \ldots + E(M_{100}) = 100 \times 2 = 200$

   La masse de 100 cachets est donc en moyenne de 200 grammes.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.

   Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'écart-type σ, donc de variance $V(M_i) = \sigma^2$.

   Les variables M_i étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance :

   $V(S) = V(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}) = V(M_1) + V(M_2) + \ldots + V(M_{100}) = 100\sigma^2$

   $s = \sqrt{V(S)} = \sqrt{100\sigma^2} = 10\sigma$

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9, c'est-à-dire que $P(199 < S < 201) > 0{,}9$.

   a. $199 < S < 201 \iff 199 - 200 < S - 200 < 201 - 200 \iff -1 < S - 200 < 1$
   $\iff |S - 200| < 1$

   Donc $P(199 < S < 201) = P(|S - 200| < 1)$

   En prenant l'événement contraire :

   $P(|S - 200| < 1) > 0{,}9 \iff P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$

   b. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 200$ et pour variance $V(S) = 100\sigma 2$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   pour tout $\delta \in \left]0\,;+\infty\right[$, $P(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$,

   c'est-à-dire, pour tout $\delta \in \left]0\,;+\infty\right[$, $P(|S - 200| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{\delta^2}$,

   On cherche σ pour que $P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$.

   On prend $\delta = 1$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

   $P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{1^2}$, c'est-à-dire $P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 100\sigma^2$

   Il suffit que $100\sigma^2 \leqslant 0{,}1$ donc que $\sigma^2 \leqslant 10^{-3}$, et donc que $\sigma \leqslant \sqrt{10^{-3}}$.

   La valeur maximale de σ qui permet d'assurer la condition requise est
   $\sigma = \sqrt{10^{-3}} \approx 0{,}0316$.