

14 : Combinatoire et dénombrement

I. Cardinal d'un ensemble et principal additif

1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E . On le note $\text{card}(E)$.

Exemple

- $E = \{a; b; c\}$ est un ensemble fini à 3 éléments.
- $\emptyset$ est appelé ensemble vide. $\text{card}(\emptyset) = 0$

2. Principe additif

Définition

2 ensembles A et B dont l'intersection est vide sont disjoints. On note $A \cap B = \emptyset$.

Propriété

Si $E_0, E_1, \dots, E_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_p)$$

Exemple

$A = \{a; b; c\}$ et $B = \{d; e\}$.

On a $A \cap B = \emptyset$ donc A et B sont disjoints.

$A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$, donc $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) = 3 + 2 = 5$.

Application 1

On interroge un groupe de skieurs, et on a :

14 skieurs pratiquent le ski de piste, 7 pratiquent le ski de fond, 4 pratiquent les deux sports. 3 ne pratiquent rien.

Combien de skieurs y a-t-il dans ce groupe ?

Application 2

Parmi 40 secrétaires, 8 connaissent le russe, 15 l'anglais et 9 l'allemand. D'autre part, 4 parlent l'anglais et l'allemand, 5 l'anglais et le russe, 2 l'allemand et le russe et 2 les trois langues. Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

3. Produit cartésien

Définition

E , F et G sont trois ensembles.

- Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in E$ et $b \in F$. Il est noté $E \times F$.
- Le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (a, b, c) où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des p -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, ..., $a_p \in E_p$.

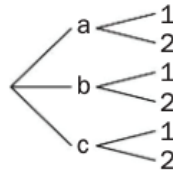
Notation

$$E^2 = E \times E$$

$$E^k = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}}$$

Exemple

- $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors $E \times F = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$.
On peut représenter le produit cartésien par un arbre :



Un élément de $E \times F$ est un chemin de l'arbre.

- (a, b, a, c, b) est un 5-uplet de E . $(a, b, a, c, b) \in E^5$.
 $E^2 = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$

Remarque

- L'ordre compte
- Répétition

4. Principe multiplicatif

Propriété

- Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont p ensembles finis, alors :
 $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$
- Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(E^p) = n^p$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F) = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{card}(E^2) = 3^2 = 9$$

$$\text{card}(E^5) = 3^5 = 243 \text{ C'est le nombre de 5-uplets d'éléments de } E.$$

Application 3

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats et 2 desserts.

1. Combien de menus différents sont composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert ?
2. Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Application 4

Pour ouvrir un coffre-fort il faut rentrer la bonne combinaison constituée de 2 lettres et de 4 chiffres.

1. Combien y a-t-il de combinaisons différentes ?
2. Combien y a-t-il de combinaisons différentes :
 - a. sachant qu'elle se termine par 5 ?
 - b. sachant qu'elle se termine par un chiffre pair ?
 - c. sachant qu'elle commence par la lettre C ?
 - d. sachant qu'elle commence par la lettre F et se termine par le nombre 25 ?

Application 5

Jacob a 26 stylos au fond de son sac. Parmi eux, 14 sont des stylos à bille, 11 n'ont plus d'encre, 5 ne sont ni des stylos à bille, ni vides.

Combien Jacob a-t-elle de stylos à bille vides dans son sac ?

II. Arrangements et permutations

n et p sont des nombres entiers naturels avec $p \leq n$. E est un ensemble à n éléments.

1. Factorielle

Définition

On appelle factorielle n et on note $n!$ le produit de tous les nombres entiers de 1 à n .

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

TI NSpire : Menu 51

2. Arrangement

Définition

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E est un p -uplet d'éléments distincts de E .

Exemple

On considère l'ensemble $A = \{b; j; n; o; r; u\}$.

- (j, o, u, r) et (b, u, r, o) sont des arrangements de 4 éléments de A .
- (b, o, n) , (r, o, u) et (b, u, j) sont des arrangements de 3 éléments de A .
- (b, o, n, j, o, u, r) n'est pas un arrangement de A car l'élément o est répété 2 fois.
C'est un 7-uplet de A .

Remarques

- L'ordre compte
- Pas de répétition

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 1

$A = \{b; j; n; o; r; u\}$. Pour former un 4-uplet (ou quadruplet) d'éléments distincts de A , on a :

- 6 choix pour la 1^{ère} lettre
- 5 choix pour la 2^{ème} lettre (car il n'y a pas de répétition)
- 4 choix pour la 3^{ème} lettre
- 3 choix pour la 4^{ème} lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements de 4 éléments de A est :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360.$$

Exemple 2

On s'intéresse au classement des trois gagnants dans un tournoi de jeux vidéo opposant huit joueurs, c'est-à-dire aux trois joueurs arrivés en tête et à leur ordre d'arrivée. En notant B l'ensemble des huit joueurs, les classements sur le podium possibles sont les arrangements de trois éléments de B : il y en a :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = 336.$$

TI NSpire : Menu 52

Application 6

Lors d'une course automobile, il y a 15 pilotes.

On regarde les 5 premiers.

Combien y a-t-il d'arrivées possibles ?

3. Permutation

Définition

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E .

Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a; b; c\}$

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$ sont les 6 permutations de G .

Propriété

Le nombre de permutations de E est $n!$

Exemple

On considère l'ensemble $A = \{b; j; n; o; r; u\}$.

Le nombre de permutations de A est $6! = 720$

Application 7

Bob souhaite ranger verticalement sur une même étagère 5 livres de biologie, 3 livres de mathématiques et 2 livres d'histoire.

1. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?
2. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

Exercice 1

Une course hippique oppose 17 chevaux.

1. Un tiercé gagnant consiste à donner les 3 chevaux arrivés en tête parmi les 17 chevaux participant à la course, ainsi que l'ordre d'arrivée de ces trois chevaux.

Combien de tiercés différents existe-t-il pour cette course ?

2. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'ordre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

Exercice 2

Combien y a-t-il d'anagrammes de chacun des mots suivants :

Maths – Bernard – Papa – Ananas

III. Combinaison

1. Combinaison d'éléments d'un ensemble

Définition

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments.

Exemple

Si $E = \{\text{bleu ; rouge ; orane ; noir ; vert}\}$, alors les ensembles :

- (bleu , noir , vert)
- (noir , orange , bleu)

sont deux combinaisons de 3 éléments de E .

Remarques

- L'ordre ne compte pas
- Pas de répétition

2. Calcul du nombre de combinaisons

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

- Le nombre de combinaisons de p éléments de E , noté $\binom{n}{p}$ est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 2 \times 1}$$

- $\binom{n}{p}$ s'appelle aussi coefficient binomial.

TI NSpire : Menu 53

Cas particuliers

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

Exercice 3

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués.

On ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.

1. Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
2. Combien existe-t-il de possibilités pour élire 2 filles et 2 garçons ?
3. Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Propriété

- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Relation de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

3. Triangle de Pascal

Propriété

Le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux rapidement :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2} = 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

4. Parties d'un ensemble

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de partie de E est : $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

Exemple

Soit : $E = \{1; 2; 3\}$.

Alors toutes les parties de E sont : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}$.

Il y a donc 8 parties de E , en effet $2^3 = 8$.

Exercice 4

On dispose d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs : Pique – Cœur – Carreau – Trèfle, et de 8 valeurs par couleurs : 7 – 8 – 9 – 10 – Valet – Dame – Roi – As).

On tire une main de 8 cartes.

1. Combien existe-t-il de mains ?

2. Combien de mains de 8 cartes sont composées :

a. De 3 cœurs ? b. De 2 rois ? c. De 3 cœurs et de 2 rois ?

Exercice 5

Remplir une grille de EuroMillion consiste à choisir cinq numéros entre 1 et 50 (l'ordre ne compte pas), puis deux numéros « chance » de 1 à 12.

Combien de grilles différentes peut-on remplir ?