

14 - Combinatoire et dénombrement

Exercice 1

On considère les ensembles $A = \{s; v; t\}$ et $B = \{m; a; t; h\}$.

1. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \times B$.
2. a. Déterminer toutes les paires existantes à partir de l'ensemble A.
b. Pouvaient-on prévoir le nombre de paires existantes ?

Exercice 2

Dans une station de sports d'hiver, on interroge au hasard 20 touristes. Parmi eux, 14 déclarent pratiquer le ski de piste, 7 déclarent pratiquer le ski de fond et enfin 4 déclarent pratiquer les deux sports.

1. Construire un diagramme représentant cette situation.
2. Combien de touristes ne pratiquent ni le ski de piste, ni le ski de fond ?

Exercice 3

Monsieur Patate possède 3 chapeaux, 5 nez et 4 paires de chaussures. La petite Sarah choisit au hasard un chapeau, un nez et une paire de chaussures. De combien de façons différentes peut-on habiller Monsieur Patate ?

Exercice 4

Deux options sont offertes aux élèves d'une classe de 40 élèves : espagnol ou musique. 25 élèves ont choisi l'espagnol et 18 la musique.

Par ailleurs, 10 élèves ont choisi les deux options.

On choisit au hasard un élève de cette classe.

1. Représenter cette situation par un diagramme ou par un tableau à double entrée.
2. En utilisant une des deux représentations précédentes, déterminer le nombre d'élèves qui :
 - a. n'étudient aucune des deux matières.
 - b. étudient uniquement l'espagnol.
 - c. étudient uniquement une des deux matières.

Exercice 5

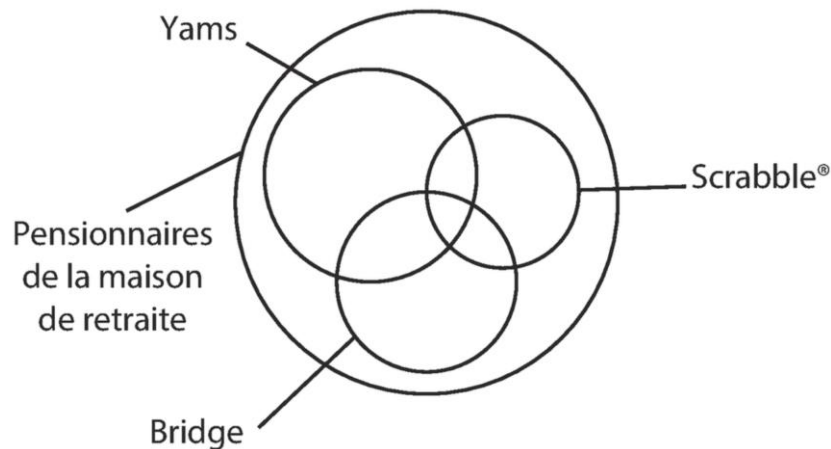
Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre parmi A et B, et de 3 chiffres distincts ou non parmi les entiers de 0 à 9.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien de codes y a-t-il comportant la lettre A et finissant par le chiffre 2 ?
3. Combien de codes y a-t-il comportant que des chiffres impairs ?
4. Combien de codes y a-t-il sans le chiffre 1 ?
5. Combien de codes y a-t-il comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
6. Combien de codes y a-t-il comportant des chiffres distincts ?
7. Combien de codes y a-t-il comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 6

Dans une maison de retraite, 100 personnes âgées jouent à différents jeux de société. 34 préfèrent le Scrabble, 21 le bridge et 26 le yams. Par ailleurs, 10 jouent au bridge et au yams, 9 jouent au yams et au Scrabble et 12 jouent au bridge et au Scrabble. Sans oublier les 4 personnes qui jouent à tous les jeux.

1. Recopier et compléter le diagramme suivant.



2. En déduire le nombre de personnes qui ne jouent à aucun de ces jeux.

3. Déterminer le nombre de personnes qui ne jouent qu'à un seul jeu.

4. Déterminer le nombre de personnes qui jouent exactement à deux jeux.

Exercice 7

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Parmi ceux-ci, il y a huit jetons blancs avec le numéro 0, cinq jetons rouges avec le numéro 7, quatre jetons blancs avec le numéro 2 et trois jetons rouges avec le numéro 5. On tire simultanément quatre jetons du sac.

1. Combien de tirages possibles y a-t-il ?

2. Combien de tirages y a-t-il avec les quatre numéros identiques ?

3. Combien de tirages y a-t-il avec uniquement des jetons blancs ?

4. Combien de tirages y a-t-il avec des jetons de la même couleur ?

5. Combien de tirages y a-t-il qui permettent de former le nombre 2020 ?

6. Combien de tirages y a-t-il qui comportent au moins un jeton portant un numéro différent des autres ?

Exercice 8

Aux championnats du monde d'athlétisme, 8 coureurs prennent le départ de la finale du 200 m.

1. Combien y a-t-il de podiums différents ?

2. Sachant qu'un français fait partie des 8, combien de podiums sont possibles avec lui ?

Exercice 9

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?

3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?

Exercice 10

7 amis, 4 garçons et 3 filles se rendent à un concert. Ils s'assoient les uns à côté des autres dans la même rangée.

1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Combien y en a-t-il avec les garçons d'un côté et les filles de l'autre ?
3. Combien y en a-t-il avec les filles et les garçons intercalés ?

Exercice 11

A la contrée, chaque joueur possède une main de 8 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains peut-on distribuer ?
2. Combien de mains ne contiennent pas de cœur ?
3. Combien de mains contiennent au moins 1 cœur ?
4. Combien de mains contiennent 4 as ?
5. Combien de mains contiennent un as ou un cœur ?

Exercice 12

Dans une classe de lycée, on interroge 20 élèves au hasard. 14 déclarent aimer les maths, 7 déclarent aimer la physique et 4 déclarent aimer les deux matières.

1. Faire un tableau à doubles entrées.
On choisit au hasard 4 de ces élèves parmi les 20. Parmi tous les choix possibles :
2. Combien comporte 4 élèves qui aiment les maths ?
3. Combien comporte exactement 2 élèves qui n'aiment que les maths et 2 autres qui n'aiment que la physique ?
4. Combien comporte 4 élèves qui n'aiment ni les maths ni la physique ?

Exercice 13

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués (on ne distingue pas les délégués et leurs adjoints).

1. Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
2. Léa dit qu'elle ne souhaite pas être élue si David est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Aide : on pourra déjà envisager le nombre de possibilités où Léa et David sont délégués ensemble.

Exercice 14

On dispose de 26 cartes où sont écrites les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois cartes de ce jeu.

1. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peuvent être composés ?

On justifiera que ce nombre s'écrit $\frac{26!}{23!}$.

2. a. Combien de mots commençant par la lettre B peuvent être créés ?
b. En déduire la probabilité de l'événement A_1 : « le mot commence par la lettre B ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement A_2 : « la seconde lettre du mot est la lettre B ».
4. Quelle est la probabilité de l'événement B : « le mot contient la lettre B ».

Exercice 15 : Centres étrangers J2 – Juin 25

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.

Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.

2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.

3.

a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule

b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.

c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.

d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Exercice 16 : Polynésie J2 – Juin 25

1. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale. Elle veut former un groupe de 5 élèves.

De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5 B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ D. $\binom{31}{5}$

2. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ C. $\binom{20}{3}$ D. $20^3 \times 11^2$