

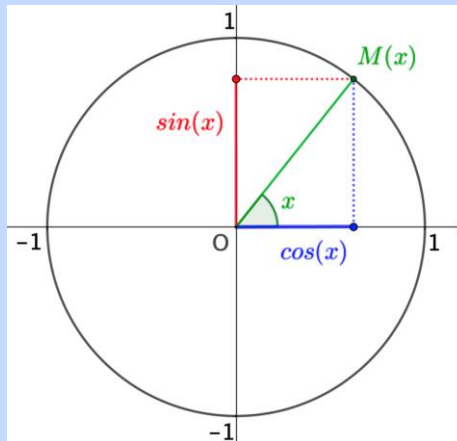
## 15 : Fonctions trigonométriques

### I. Rappels de premières

#### Définition

Soit  $M$  le point du cercle trigonométrique associé au nombre  $x$  (qui est un angle orienté).

- Le cosinus de  $x$  est l'abscisse de  $M$  et on le note  $\cos(x)$ .
- Le sinus de  $x$  est l'ordonnée de  $M$  et on le note  $\sin(x)$ .

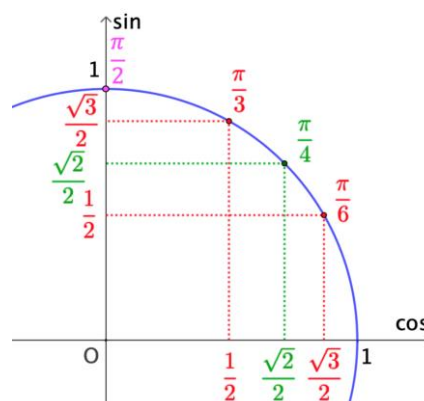


#### Propriétés

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

#### Valeurs remarquables de cosinus et de sinus

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



## II. Résolution d'équations trigonométriques

### 1. Avec cosinus

#### Propriété 1

L'équation  $\cos(x) = \cos(a)$  a pour solutions les nombres réels de la forme :

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

### 2. Avec sinus

#### Propriété 2

L'équation  $\sin(x) = \sin(a)$  a pour solutions les nombres réels de la forme :

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

#### Exemple 1

On veut résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

On a  $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . On a donc  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Les solutions dans  $\mathbb{R}$  sont alors  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

#### Exemple 2

On veut résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  l'équation  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

On considère les solutions précédentes  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  et on fait varier le  $k$ .

Posons  $k = 0$ . Les solutions dans  $]-\pi; \pi]$  sont alors  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$ .

### Exemple 3

On veut résoudre dans  $[0; 2\pi[$  l'équation  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

On considère les solutions précédentes  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  et on fait varier le  $k$ .

Posons  $k = 0$  :  $x = -\frac{\pi}{4} \notin [0; 2\pi[$  et  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Posons  $k = 1$  :  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ .

Les solutions dans  $[0; 2\pi[$  sont alors  $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$ .

### Exemple 4

On veut résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $]-\pi; \pi]$  l'équation  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ .

On a  $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ . On a donc  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

➤ Les solutions dans  $\mathbb{R}$  sont alors  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

➤ Posons  $k = 0$ . On a  $x = -\frac{\pi}{6}$  et  $x = \frac{7\pi}{6} \notin ]-\pi; \pi]$

Posons  $k = -1$ . On a  $x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6} \in ]-\pi; \pi]$

Les solutions dans  $]-\pi; \pi]$  sont alors  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6} \right\}$ .

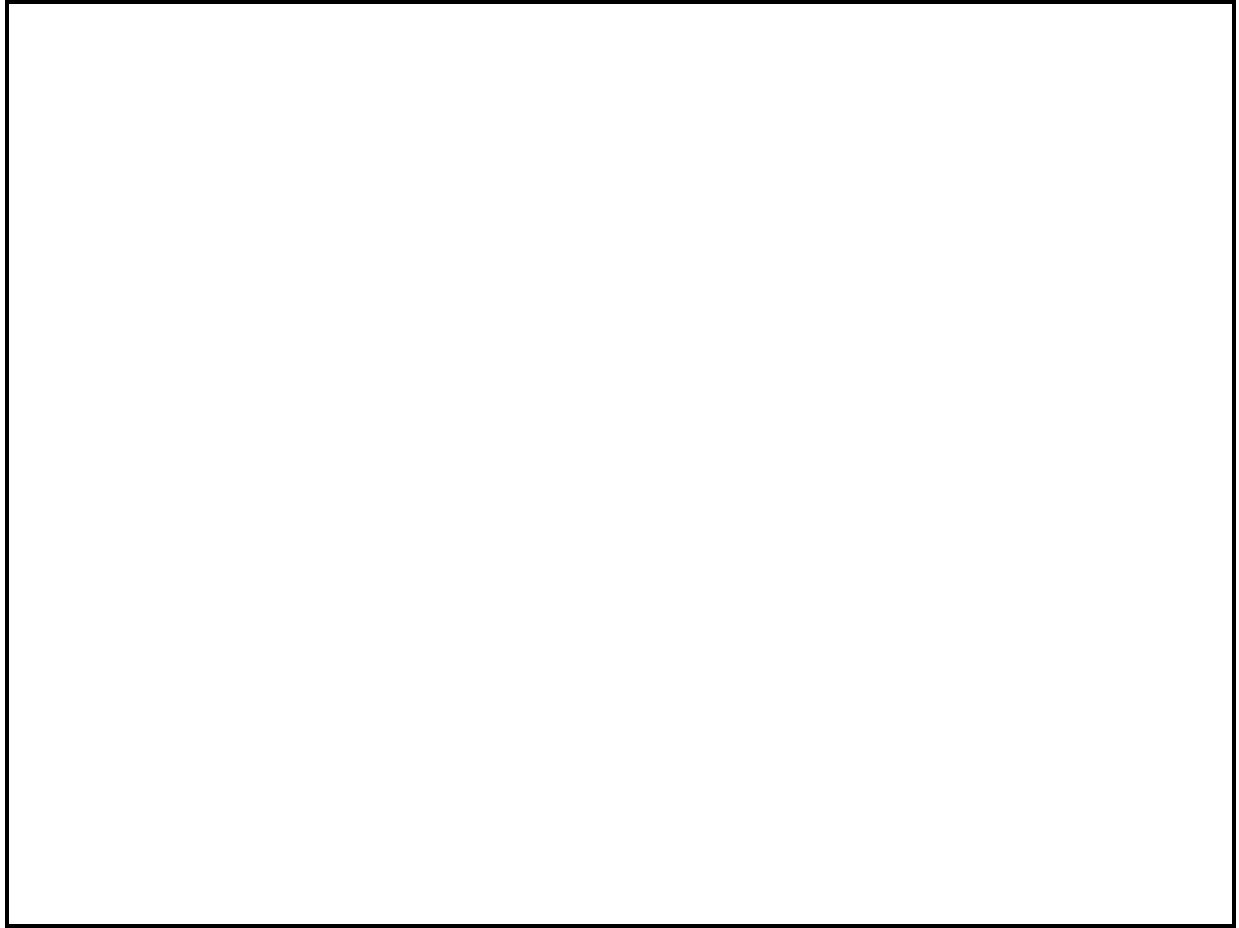
### Application 1

Résoudre les équations suivantes :

1.  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $]-\pi; \pi]$

2.  $3\cos(x) + 1 = -0,5$  dans  $[0; 2\pi[$

3.  $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$  dans  $]-\pi; \pi]$



### Remarque

Pour résoudre des inéquations, il est vivement conseillé de faire un cercle trigonométrique pour visualiser les solutions.

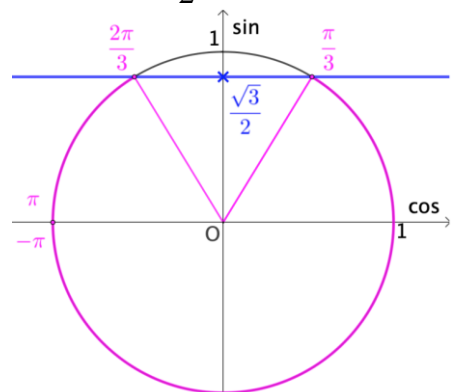
### Exemple

Résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  l'inéquation  $2 \sin x - \sqrt{3} \leq 0$ .

On cherche à résoudre alors l'inéquation  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

➤ On commence par trouver les points du cercle tels que  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

➤ On veut trouver des valeurs de sinus inférieures à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



- Elles correspondent à la partie du cercle trigonométrique située en dessous des points associés à  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ .
- Ainsi  $S = \left] -\pi; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]$

### Application 2

Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$  dans  $[0; 2\pi[$

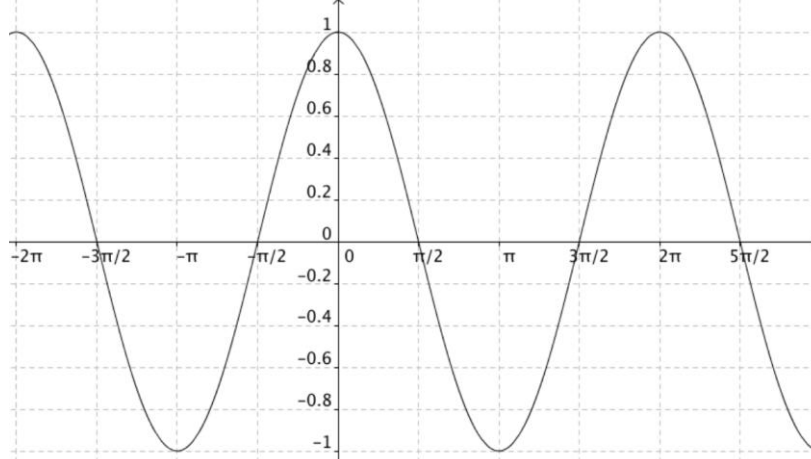
2.  $(1 + \cos x) \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) > 0$  dans  $] -\pi; \pi ]$

### III. Fonctions cosinus et sinus

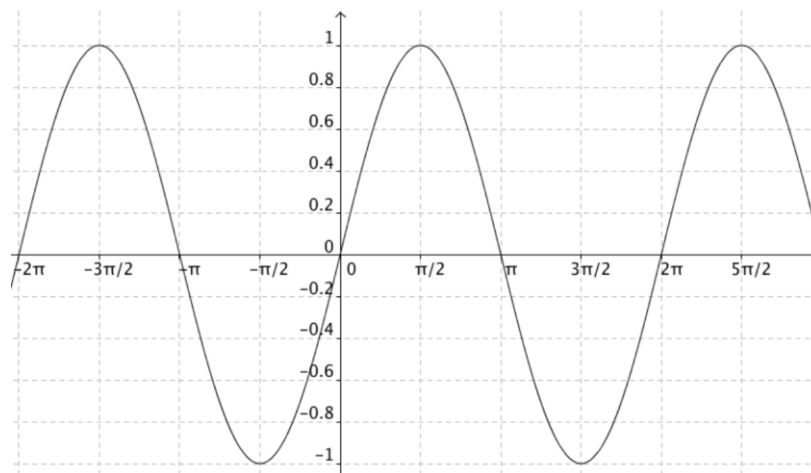
#### Définition

- La fonction cosinus est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $\cos(x)$ .
- La fonction sinus, est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $\sin(x)$ .

#### Courbes représentatives



Fonction cosinus



Fonction sinus

#### Propriété : Périodicité

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

### **Remarque**

Si une fonction est périodique de période  $2\pi$ , on peut restreindre l'étude de cette fonction à un intervalle d'amplitude  $2\pi$ , et déduire le reste de la courbe par translations.

En général, les restrictions sont les intervalles  $[-\pi; \pi]$  ou  $[0; 2\pi]$ .

#### **Définition : Parité**

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire.

### **Remarque**

Si une fonction est paire ou impaire, on peut restreindre l'étude de cette fonction à la partie positive de l'intervalle et déduire le reste de la courbe par symétrie.

L'intervalle  $[-\pi; \pi]$  est restreint à l'intervalle  $[0; \pi]$ .

#### **Propriété : Parité**

- $\cos(-x) = \cos(x)$ . La fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ . La fonction sinus est impaire.

#### **Application 3**

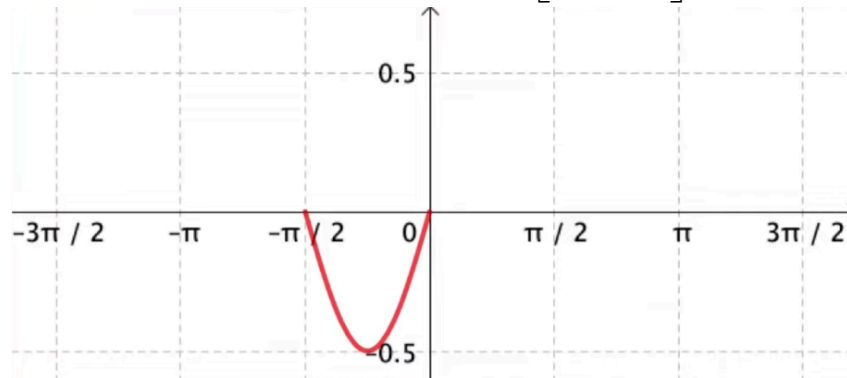
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2 - \cos(x)}$ .

1. Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ . Restreindre alors l'intervalle d'étude.
2. Montrer que  $f$  est impaire. Restreindre encore l'intervalle d'étude.

### Application 4

Soit  $f$  une fonction impaire et périodique de période  $\pi$ .

Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .



### IV. Variations des fonctions cosinus et sinus

$a$  et  $b$  sont 2 réels.  $u$  est une fonction dérivable.

#### Dérivation

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

#### Propriété : Tableau de variation

$x$	$-\pi$	$0$	$\pi$	
Signe de $\cos'(x)$		+	0	-
Variations de la fonction cosinus			1	
	-1			-1

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$			
Signe de $\sin'(x)$		-	0	+	0	-	
Variations de la fonction sinus				1			
	0				-1		0

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(2x) - 1$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .
2. Démontrer que la fonction  $f$  est périodique de période  $\pi$ .
3. Étudier les variations de  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
4. Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$ .

1. Prouver que  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .
3. a. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de  $f$  à l'intervalle  $[0; \pi]$ .  
b. Calculer  $f'(x)$  et prouver que  $f'(x) = \sin(x)[2\cos(x) - 1]$ , pour  $x \in [0; \pi]$ .

**Rappel :**  $(u^n)' = nu' u^{n-1}$ .

- c. Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; \pi]$  puis dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; \pi]$ .
- d. En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$