15 : Fonctions trigonométriques

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x)=0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(3x)=\frac{1}{2}$

4. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

1. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x)-1\geq 0$

2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $1-2\sin(x)\geq 0$

Exercice 3

1. On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-\sin(x)$.

a. Démontrer que la fonction *f* est croissante sur son ensemble de définition.

b. Calculer $f(0)$ et démontrer que, pour tout nombre réel positif, $\sin(x)\leq x$.

2. On considère la fonction *g* définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction *g* sur son ensemble de définition.

b. En déduire que, pour tout nombre réel positif, $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos(x)$.

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\sin(2x)-x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la valeur exacte de $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $f(\pi)$.

2. On admet que *f* est dérivable sur $[0;\pi]$.

a. Montrer que $f'(x)=2\cos(2x)-1$.

b. On admet que pour $x\in\mathbb{R}$, $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$. Montrer que $f'(x)=4\cos^2(x)-3$.

3. On cherche le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$.

a. Résoudre l'inéquation $4X^2-3\geq 0$.

b. En posant $X=\cos(x)$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$, puis dresser le tableau de variations complet de *f* sur cet intervalle.

4. Déterminer une équation de la tangente *T* à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.