16 : Variables aléatoires et lois des grands nombres

I. Somme de variables aléatoires

Exemple

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :
- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs -2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1€ au premier jeu et perdu 2€ au deuxième jeu.

Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.
Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.
En effet,

Y \ X	**1**	**2**
−2	−1	0
3	4	5
4	5	6

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires.
La loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} P\big((X=i) \cap P(Y=j)\big)$$

Si de plus les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} P(X=i) \times P(Y=j)$$

On dit dans ce cas que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exemple

Pour l'exemple précédent :

$$P(X+Y=-1) = P\big((X=1) \cap P(Y=-2)\big) = P(X=1) \times P(Y=-2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Application 1

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La première partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur pile, on gagne 1€. Si on tombe sur face, on gagne 2€.
- La deuxième partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair on gagne 1€, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2€, si on tombe sur le « 1 » on perd 5€.

La variable aléatoire X désigne les gains à la première partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la deuxième partie.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

II. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

Propriétés

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Application 2

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$.
Soit Y une autre variable aléatoire telle que $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.
Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :
$Z = 2X - 15$ $\quad$ $T = X + Y$ $\quad$ $U = -5Y$

III. Application à la loi binomiale

1. Echantillon d'une loi de probabilité

Définition

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Propriétés

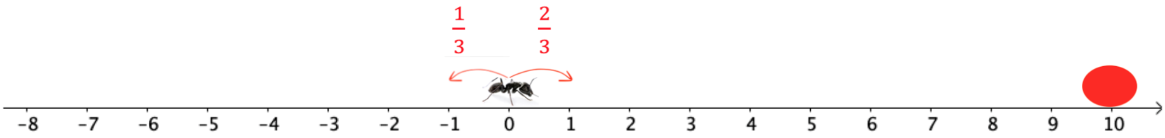
Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. On a alors :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$

Exercice 1

Sur un axe gradué, on dépose une petite goutte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10. Moshé pose une fourmi sur l'origine de l'axe gradué. Attirée par la confiture, la fourmi se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au n-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ la variable aléatoire somme des X_i.



1. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3. Au bout de combien de déplacements, la fourmi peut-elle espérer théoriquement atteindre la goute de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

3. <u>Echantillon de la loi de Bernoulli</u>

Propriété

Soit $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ un échantillon de taille *n* de la loi de Bernoulli de paramètre *p*.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

Exemple

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire. Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas. Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ forme un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}998$.

4. Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$E(X) = np$ $\qquad$ $V(X) = np(1-p)$ $\qquad$ $\sigma(X) = \sqrt{V(S)}$

Application 3

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.
Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

IV. Moyenne d'un échantillon

Définition

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
La variable aléatoire moyenne M_n de l'échantillon est donnée par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots X_n)$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. Alors on a :

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

Application 4

$X_1, X_2, \dots, X_{100}$ sont 100 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}23$.
Quelle loi suit $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$? En déduire $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$, puis $E(M_n)$, $V(M_n)$ et $\sigma(M_n)$.

III. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Soit X une variable aléatoire et soit t un nombre réel strictement positif. On a :

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Application 5

Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.
1. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev pour $t = 2$.
2. Recommencer pour $t = 2\sigma(X)$, pour $t = 3\sigma(X)$ et pour $t = 4\sigma(X)$.
3. Que constate-t-on ?

IV. Loi des grands nombres

Définition

Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille *n* de la variable aléatoire *X*.
Pour tout réel $t > 0$ on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{nt^2}$$

Application 6

Soit une variable aléatoire X telle que $E(X) = 0{,}2$ et $V(X) = 0{,}16$.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de *X*.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille *n* de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0\,,37[$ soit supérieure à 0,95.

Propriété

Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel strictement positif t, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$

Remarque

La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Exercice bac : Métropole J2 – juin 24

On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.

5. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

Exercice : Asie J1 – juin 25

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication.
On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.

2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé. Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.

a. Montrer que $E(F_n) = 0{,}95$ et que $V(F_n) = \frac{0{,}0475}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.