∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 10 juin 2021 ∾

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$.

Si T est la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1, on sait que :

$M(x~;~y) \in T \iff y - g(1) = g'(1)(x-1)$.

✦g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = 2x + 2 + \dfrac{3}{x^2}$

On a donc $g'(1) = 2 + 2 + \dfrac{3}{1} = 7$;

✦D'autre part $g(1) = 1^2 + 2 \times 1 - \dfrac{3}{1} = 0$.

On a donc : $M(x~;~y) \in T \iff y - 0 = 7(x-1) \iff y = 7x - 7$. Réponse **a.**

Question 2 :

Pour n assez grand, on a $n \neq 0$, donc $v_n = \dfrac{3}{1 + \frac{2}{n}}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = 3$. Réponse **b.**

Question 3 :

Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre e boules noires tirées, l'expérience correspond à une loi de Bernoulli et X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

On sait que $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times \left(1 - 0,4^6\right) \approx 0,111\,47 \approx 0,111\,5$ à 10^{-4} près. Réponse **c.**

Question 4 :

On a pour $x \neq 0$, $\quad f(x) = x\left(3\dfrac{\text{e}^x}{x} - 1\right)$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Réponse **b.**

Question 5 :

Le nombre de codes différents est donc $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$.

Il faut donc $\dfrac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211$ (s) ou $\approx 478,2$ (min) ou $\approx 7,8$ (h). Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.

   D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98+50$.

Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.

On obtient $u_{68} \approx 12\,009$.

le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :

$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$: la proposition est vraie au r ng $n+1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

Or d'après le résultat précédent :

$u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:

$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.

d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12500$

Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = -0,02 \times (-500)\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 10\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$.

   Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que $f'(x) > 0$: la fonction est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$

2. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x) = 12\,500$.

3. Il faut résoudre l'inéquation :

   $12\,500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff 1 > \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$, soit par croissance de la fonction exponentielle :

   $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4$ et en multipliant chaque membre par 50 :

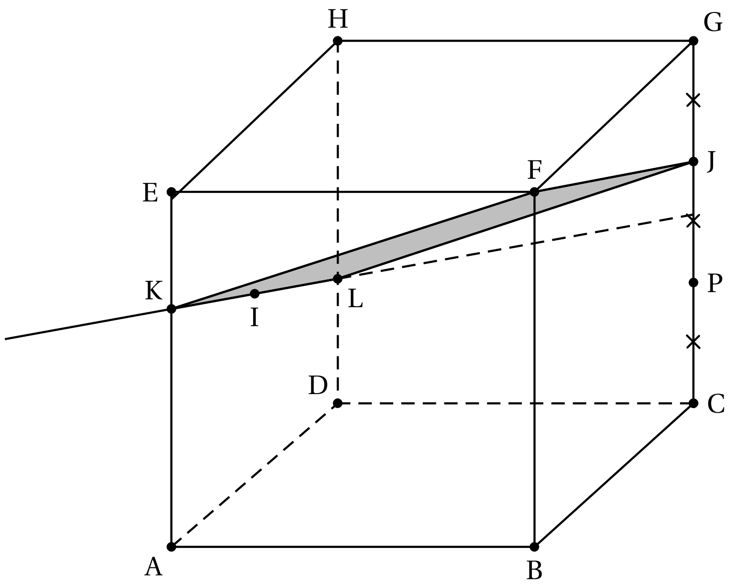
   $x > 70$:il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc $a \in [0~;~1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{CJ}} = a\overrightarrow{\mathrm{CG}}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}~;~\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1. Dans le repère $\left(\mathrm{A}~;~\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, $\mathrm{F}(1\,;\,0\,;\,1)$, I milieu de [AH] et de de [DE], donc $\mathrm{I}\left(0~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{J}\left(1~;~1~;~\frac{2}{3}\right)$

2. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{I}M} = t\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$.

Avec $\overrightarrow{\mathrm{I}M}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\times 0 \\ y-\frac{1}{2} & = & t\times 1 \\ z-\frac{1}{2} & = & t\times\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{2}+t \\ z & = & \frac{1}{2}-\frac{t}{3} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. **a.** Le point K est le point de (d) d'ordonnée nulle, soit $t+\frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$. Sa cote est donc $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Donc $\mathrm{K}\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

b. Tous les points de (DH) ont une ordonnée égale à 1.

Or un point de (d) a une ordonnée égale à $\frac{1}{2}+t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

Enfin L a une cote égale à $z = \frac{1}{2}-\frac{t}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{3}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$\mathrm{L}\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

4. **a.** Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}\right)$, soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right)$, soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Conclusion : les diagonales de FJLK ont le même milieu : FJLK est un parallélogramme.

b. On a $\overrightarrow{\mathrm{FL}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{FL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}} = 1-1+0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, don FJLK est un losange.

c. On a $\overrightarrow{\mathrm{KF}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{KF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}} = 0+0-\dfrac{1}{9} \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont pas perpendiculaires, donc FJLK n'est pas un rectangle, donc pas un carré.

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $\mathrm{K}\left(0\,;\,0\,;\,1-\dfrac{a}{2}\right)$ et $\mathrm{L}\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\,;\,1]$.

1. On sait que J est défini par $\overrightarrow{\mathrm{CJ}} = a\overrightarrow{\mathrm{CG}}$.

On a avec G(1; 1; 1), $\overrightarrow{\mathrm{CG}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $a\overrightarrow{\mathrm{CG}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et comme C a pour coordonnées (1; 1; 0), on en déduit que J a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,a)$.

2. On a $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{KL} \iff$ FJLK est un parallélogramme.

3. On a $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}-1\\1\\\dfrac{a}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1-\dfrac{3a}{2}\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{JK}=1-1+\left(\dfrac{a}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{3a}{2}\right)=\left(\dfrac{a}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{3a}{2}\right)$.

On a $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{JK}=0 \iff \left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{a}{2}-1 & = & 0\\ & \text{ou} & \\ 1-\dfrac{3a}{2} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{a}{2} & = & 1\\ & \text{ou} & \\ 1 & = & \dfrac{3a}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}a & = & 2\\ & \text{ou} & \\ \dfrac{2}{3} & = & a\end{array}\right.$

La seule solution de l'intervalle $[0\,;\,1]$ est $\dfrac{2}{3}$, la valeur particulière de la partie A.

Dans ce cas le produit scalaires étant nul, les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont particulières : les diagonales du parallélogramme étant perpendiculaires, le quadrilatère FJLK est un losange.

4. On a vu dans la question précédente que seule la valeur $\dfrac{2}{3}$ de a donnait un losange FJLK et dans la question **4. c.** on a vu qu'alors le losange n'était pas un carré.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

1. ✦ Si le test est négatif on aura fait un test : $X_n=1$;

✦ Si le test est positif il faudra faire le test des n personnes plus le test global : $X_n=1+n$.

2. $P(X_n=1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : le test des n personnes et que celui-ci soit négatif donc que les n personnes ne soient pas malades.

La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0,05, donc qu'une personne soit saine $1-0{,}05=0{,}95$ et donc que n personnes soient saines est égale à $0{,}95^n$. Donc $P(X_n=1)=0{,}95^n$.

On a donc $P(X_n=n+1)=1-0{,}95^n$

x_i	1	$n+1$
$P(X_n=x_i)$	$0{,}95^n$	$1-0{,}95^n$

3. On a $E(X_n)=1\times0{,}95^n+(n+1)\times\left(1-0{,}95^n\right)=0{,}95^n+(n+1)-0{,}95^n(n+1)=0{,}95^n+n+1-n\times0{,}95^n-0{,}95^n=n+1-n\times0{,}95^n$.

Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon n personnes : cette espérance est voisine de n.

Partie B :

1. $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   f est une somme de fonctions dérivables sur $[20\;;\;+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0,95)$.

   Or $20 \leqslant x \Rightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{20} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \ln 0,95 \leqslant \dfrac{1}{20} + \ln 0,95$.

   Or $\dfrac{1}{20} + \ln 0,95 \approx -0,001$; il en résulte que $f'(x) \leqslant 0$: la fonction f est décroissante sur $[20\;;\;+\infty[$.

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

   On a puisque $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95\right)$.

   Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = \ln 0,95 < 0$.

   Finalement par produit de limites puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = 0,95 < 0$, on a

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. La question précédente montre que f est décroissante de $f(20) = \ln 20 + 20\ln 0,95 \approx 1,97$ à moins l'infini.

   f est continue car dérivable sur $[20\;;\;+\infty[$ et prend ses valeurs dans les l'intervalle $]-\infty\;;\;f(20)]$ avec $f(20) \approx 1,97$.

   Comme $0 \in]-\infty\;;\;f(20)]$, et que f est décroissante sur cet intervalle il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

   La calculatrice donne $f(87,0) \approx 0,003$ et $f(87,1) \approx -0,0005$, donc $87,0 < \alpha 87,1$.

4. D'après la question précédente :

   $f(x) > 0$ sur $[20\;;\;\alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\;;\;+\infty[$.

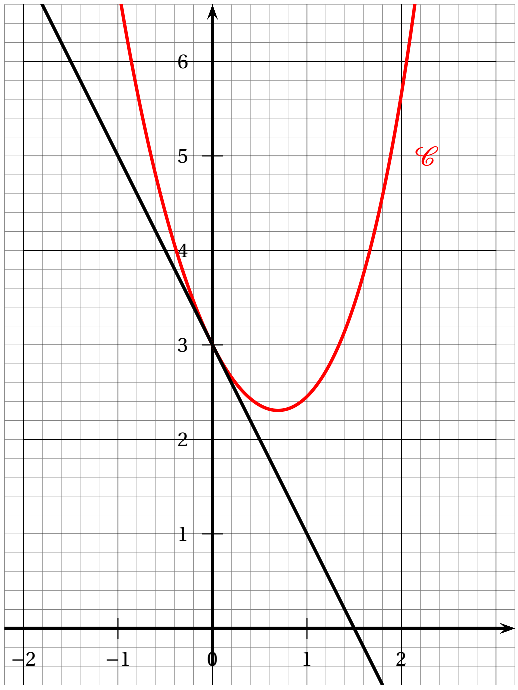
Partie C :

On a $E(X_n) < n \iff n + 1 - n \times 0,95^n < n \iff 1 < n \times 0,95^n$ ou en prenant le logarithme népérien $0 < \ln n + \ln\left(0,95^n\right) \iff 0 < \ln n + n\ln 0,95 \iff 0 < f(n) \iff f(n) > 0$.
Or on a vu à la fin de la partie B que la fonction f est positive sur l'intervalle $[20; 87]$.
Conclusion : tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode 1 avec des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la première méthode.

EXERCICE B - Équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$



1. ✦ $f(0) \approx 3$;

✦ $f'(0) \approx -2$ (coefficient directeur de la tangente)

2. On a $f(0) = 1 + b$. Or $1 + b = 3 \iff b = 2$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x + a - b\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + a - 2\mathrm{e}^{-x}$.

b. Donc $f'(0) = 1 + a - 2 = a - 1$.

c. On a vu que $f'(0) = -2 = a - 1 \iff a = -1$, donc finalement :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$$

$$(E): \quad y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$$

4. a.

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

g étant une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on a sur cet intervalle :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$, soit en remplaçant dans l'équation (E) :
$\mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x - x - 1$ égalité vraie : g est donc une solution de l'équation différentielle (E).

b. $y' + y = 0 \iff y' = -y$: on sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto f(x) = K\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

c. D'après les questions précédentes les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies que $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} + K\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1~;~+\infty[$

1. En posant $X = \text{e}^x$, on a $X^2 - X - 2$ et ce trinôme a deux solutions évidentes 2 et -1.
   $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, donc en revenant à l'écriture initiale :
   $\text{e}^{2x} - \text{e}^x - 2 = \left(\text{e}^x - 2\right)\left(\text{e}^x + 1\right)$ pour tout réel x.
2. $g'(x) = \text{e}^x - 1 - 2\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}\left(\text{e}^{2x} - \text{e}^x - 2\right)$, donc d'après la question précédente :
   $g'(x) = \text{e}^{-x}\left(\text{e}^x - 2\right)\left(\text{e}^x + 1\right)$.
3. Puisque $\text{e}^x - 2 > 0$ (admis), $\text{e}^x + 1 > 1 > 0$ et $\text{e}^{-x} > 0$, donc leur produit $g'(x) > 0$.
   Il en résulte que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1~;~+\infty[$.