Corrigé du baccalauréat Métropole 7 juin 2021

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

On donne f'', définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f''(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$.

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On a : $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} \times x - 1 \times \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$. Réponse **c.**
2. Comme sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$.
   - $f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
   - $f'(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$;
   - $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

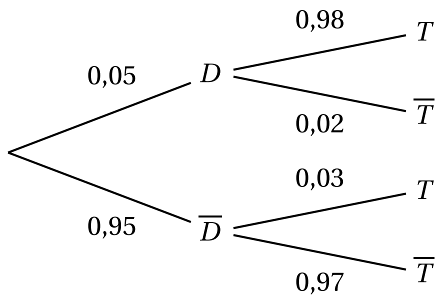
   Conclusion : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$. Réponse **c.**
3. On a : $f(x) = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}$.
   En posant $X = 2x$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Réponse **a.**
4. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^3 > 0$ et $2\mathrm{e}^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2-2x+1$.
   Or $2x^2-2x+1 = 2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
   Donc $f''(x)$ somme de deux nombres positifs est positive sur $]0\,;\,+\infty$. La fonction est donc convexe sur $]0\,;\,+\infty[$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE I

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. **a.** On a : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

b. On a de même : $P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0,0285$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775$.

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322$, soit 0,632 au millième près.

Comme $0,632 < 0,95$ on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à $0,05$, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

2. On a : $p(X = 0) = 0,05^0 \times 0,95^{20}$.

Donc la probabilité cherchée est $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$, soit 0,64 au centième près.

3. On a : $E = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$.

Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19) = 1,3+19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.

Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$(°C).

Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25°C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante : pour tout n, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

1. On a : $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$

$\iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

2. ✦ Avec $n = 0$, la relation donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;

✦ Avec $n = 1$, la relation donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.

3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.

Initialisation - $T_0 = -19 \leqslant 25$; l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$ alors en multipliant par 0,94 :

$0,94T_n \leqslant 0,94 \times 25$, soit $0,94T_n \leqslant 23,5$.

D'où en en ajourant à chaque membre 1,5 :

$0,94T_n + 1,5 \leqslant 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leqslant 25$: l'inégalité est vraie au rang n.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

$0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de la convergence monotone, cette suite converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94\left(T_n - 25\right)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$: cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.

Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a : $T_{30} = 25 - 44 \times 0,94^{30} \approx 18,12$ soit environ 18°Cau degré près.

b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17ᵉ et la 18ᵉ minute après sa sortie.

c. On complète le programme suivant, écrit en langage Python, qui doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n = 0
    T = −19
    while T < 10
            T = 25 − 0,94T
            n = n+1
    return
```

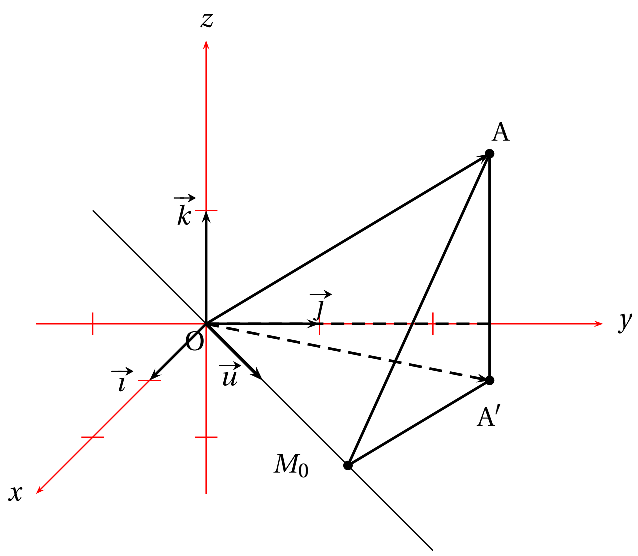
EXERCICE au choix du candidat **5 points**

EXERCICE A

Principaux domaines abordés : Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\text{O}M} = t\,\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

2. **a.** De $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\0-2\end{pmatrix}$, on calcule :

$\text{A}M^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14.$

b. $2t^2 - 8t + 14 = 2\left(t^2 - 4t + 7\right) = 2\left[(t-2)^2 - 4 + 7\right] = 2\left[(t-2)^2 + 3\right]$.

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.

On a : $2t^2 - 8t + 14 \geqslant 6$, soit $\text{A}M^2 \geqslant 6 \Rightarrow \text{A}M \geqslant \sqrt{6}$.

La plus petite distance est $\text{A}M_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2\,;\,2\,;\,0)$.

3. On a : $\overrightarrow{\text{A}M_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

On a : $\overrightarrow{\text{A}M_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites $(\text{A}M_0)$ et d sont orthogonales.

4. $\vec{u}$ est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A′ et M_0 appartiennent à ce plan le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{A}'M_0}$.

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\left(\text{AA}'M_0\right)$,donc la droite (d) est orthogonale au plan $\left(\text{AA}'M_0\right)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $\left(\text{AA}'M_0\right)$, donc $\text{O}M_0$ est la distance la plus courte du point O au plan $\left(\text{AA}'M_0\right)$.

5. Aire de la base $\mathrm{AA}'M_0$: on a $\mathrm{AA}' = 2$ et $\mathrm{A}'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1+1 = 2$. D'où $\mathrm{A}'M_0 = \sqrt{2}$.

On a donc $\mathscr{A}\left(\mathrm{AA}'M_0\right) = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

D'autre part : $\mathrm{O}M_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, d'où $\mathrm{O}M_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2} = h$.

Finalement $V = \dfrac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice B

On considère l'équation différentielle $(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$

1. De $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$, on déduit que $u'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x\right) = x(x+2)\mathrm{e}^x$.

Donc u solution de (E) si et seulement si :

$u' = u + 2x\mathrm{e}^x \iff 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x$ qui est vraie : u est une solution particulière de (E).

2. Soit $g(x) = f(x) - u(x)$

a. f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$f'(x) = f(x) + 2x\mathrm{e}^x \quad (1)$.

Or $g(x) = f(x) - u(x) \iff f(x) = g(x) + u(x)$, d'où on déduit, les deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = g'(x) + u'(x)$.

L'égalité (1) devient : $g'(x) + u'(x) = g(x) + u(x) + 2x\mathrm{e}^x \quad (2)$.

Or on a vu dans la question précédente que $u'(x) = u(x) + 2x\mathrm{e}^x$

L'équation (2) devient donc : $g'(x) = g(x)$, ce qui signifie que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

b. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions définies par $x \longmapsto K\mathrm{e}^x, \; K \in \mathbb{R}$.

Donc on a $g(x) = K\mathrm{e}^x$, $K \in \mathbb{R}$ et $f(x) = K\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x$.

Les solutions de l'équation (E) : $f(x) = (K+2)\mathrm{e}^x, \; K \in \mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction u

a. On a $u'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u'(x)$ est celui du trinôme $x(x+2)$ qui a pour racines -2 et 0.

On sait que ce trinôme est positif, sauf entre les racines :

$u'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-2[\cup[0\,;\,+\infty[$;

$u'(x) < 0$ sur $]-2\,;\,0[$;

$u'(-2) = u'(0) = 0$.

b. De la question précédente il suit que u est croissante sauf sur $]-2\,;\,0[$ où elle est décroissante, $u(-2) = 4\mathrm{e}^{-2}$ et $u(0) = 0$ étant les deux extremums de la fonction sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u		$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

c. u' est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$u''(x) = (2x+2)\text{e}^x + \left(x^2+2x\right)\text{e}^x = \text{e}^x\left(x^2+4x+2\right)$.
Comme $\text{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u''(x)$ est celui du trinôme $x^2+4x+2 = (x+2)^2-4+2 = (x+2)^2-2 = (x+2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)$.
Les racines de ce trinôme sont donc $-\sqrt{2}-2$ et $-\sqrt{2}+2$.
Le trinôme donc $u''(x)$ sont négatifs entre les racines.
Conclusion : la fonction est concave sur l'intervalle $\left]-\sqrt{2}-2\,;\,+\sqrt{2}-2\right[$.