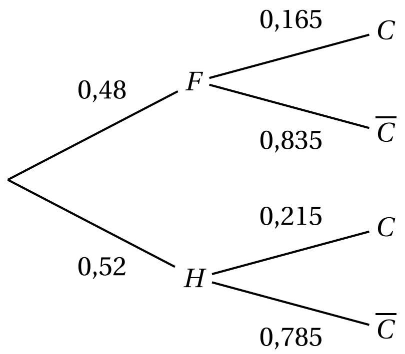
↫ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers gr. I Sujet 2 19 mai 2022 ↬
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : probabilités**

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. Calculons $p(C \cap F)$: $p(C \cap F) = p_F(C) \times p(F) = 0,165 \times 0,48 = 0,0792$

3. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $p(C)$:
$p(C) = p(C \cap F) + p\left(C \cap \overline{F}\right) = p_F(C) \times p(F) + p_{\overline{F}}(C) \times p\left(\overline{F}\right) = 0,165 \times 0,48 + 0,215 \times 0,52 = 0,191$.

b. Si les évènements F et C sont indépendants, alors $p(F \cap C) = p(F) \times p(C)$.
$p(F \cap C) = 0,0792$ et $p(F) \times p(C) = 0,48 \times 0,191 = 0,09168$.
Ces deux résultats sont différents. Les évènements F et C ne sont pas indépendants.

4. D'après la formule de Bayes : $p_C(F) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,0792}{0,191} \approx 0,4147$.
La probabilité de choisir une femme sachant qu'elle est cadre est égale à 0,4147.

5. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 15 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres dans l'échantillon, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$: $X \sim \mathcal{B}(15\ ;\ 0,191)$

b. $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \dbinom{15}{0} \times 0,191^0 \times (1 - 0,191)^{15} + \dbinom{15}{1} \times 0,191^1 \times (1 - 0,191)^{15-1}$
$\approx 0,1890$.

c. $E(X) = n \times p = 15 \times 0,191 = 13,65$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.. Cherchons la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
$p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff \iff 1 - p(X < 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - p(X = 0) \geqslant 0,99 \iff -p(X = 0) \geqslant -0,01$
$\iff p(X = 0) \leqslant 0,01 \iff (1 - 0,191)^n \leqslant 0,01 \iff 0,809^n \leqslant 0,01$.
La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc
$0,809^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(0,809^n\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,809) \leqslant \ln(0,01)$
$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)}$ car $\ln(0,809) < 0$. À la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \approx 21,73$ donc $n \geqslant 22$.
Il faudra donc que la taille de l'échantillon choisi soit supérieure ou égale à 22.

EXERCICE 2 6 points **Thème : Géométrie dans l'espace**

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$. Dans ce repère, les points notés ont pour coordonnées :

A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1)

1. **a.** Les droites (AH) et (ED) sont les deux diagonales du carré ADHE. Ces diagonales sont perpendiculaires. Donc (AH)$\perp$(ED).

   b. CDHG est un carré donc (GH) est perpendiculaire à (DH) ;
   EFGH est un carré donc (GH) est perpendiculaire à (EH).
   La droite (GH) perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (EDH) est orthogonale à ce plan (EDH).

   c. Nous savons d'une part, que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires, et d'autre part que les droites (ED) et (HG) le sont aussi. De plus les droites (HG) et (AH) sont sécantes et non confondues, donc elles définissent deux direction distinctes du plan (AGH). Donc comme la droite (ED) est perpendiculaire à ces deux dernières droites, alors (ED) est perpendiculaire au plan (AGH)

2. $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\text{ED}}$ est normal au plan (AGH).

   Le plan (AGH) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (ART) : $0x+y-z+d=0$ soit $y-z+d=0$.

   Or $A \in$ (ART) donc $0-0+d=0$ donc $d=0$. Donc (AGH) a pour équation $y-z=0$.

3. **a.** $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\-1\end{pmatrix}$. La droite (EL) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{\text{EL}}$ a pour représentation

   cartésienne : $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&0+\frac{2}{3}\times k\\y&=&0+1\times k\\z&=&1+(-1)\times k\end{array}\right.$, avec k soit $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{2}{3}k\\y&=&k\\z&=&1-k\end{array}\right.$, avec $k\in\mathbb{R}$.

   b. Les coordonnées du point d'intersection de (EL) et (AGH) sont les solution du système :
   $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}k\\y=k\\z=1-k\\y-z=0\end{array}\right.$. En remplaçant y et z dans la troisième équation, nous obtenons :

   $y-z=0 \iff k-(1-k)=0 \iff 2k-1=0 \iff k=\frac{1}{2}$.

   Donc $x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ et $z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

   Les coordonnées du point d'intersection de (EL) et (AGH) sont : $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

   c. K appartient au plan (AGH) : en effet $y-z=0$.

   De plus le vecteur $\overrightarrow{\text{LK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{\text{LK}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{ED}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{LK}}$ et $\overrightarrow{\text{ED}}$ sont colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{\text{LK}}$ est normal au plan (AGH). K est donc le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH).

d. La distance du point L au plan AGH est égale à la distance LK :

$\text{LK} = \|\overrightarrow{\text{LK}}\| = \sqrt{0^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ unité de longueur.

e. Une hauteur de LAGH est [LK]. La base correspondante est AGH, triangle rectangle en G.
$\mathcal{V}_{\text{LAGH}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{AGH}} \times \text{LK}$ avec $\mathcal{A}_{\text{AGH}} = \dfrac{\text{AH} \times \text{HG}}{2}$.
De plus $\text{AH} = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) et $\text{AG} = \sqrt{3}$ (diagonale d'un cube de côté 1). Donc $\mathcal{A}_{\text{AGH}} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ unité d'aire.

Donc $\mathcal{V}_{\text{LAGH}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ unité de volume.

EXERCICE 3 6 points — Thème : Fonctions ; Suites

1. La fonction g est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1\,000x^{999} + 1$.

La fonction g' est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 999 \times 1\,000x^{998} = 999\,000x^{998}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $999\,000x^{998} \geqslant 0$ et g'' s'annule sans changer de signe sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. **Réponse b**

2. D'après la représentation graphique de f', on peut affirmer que $f'(0) = 1$. La pente de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est égale à 1. Toute droite ayant la même pente est donc parallèle à cette tangente. C'est le cas de la droite d'équation $y = x$.

Réponse a

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée.

Réponse c

4. Soit (v_n) une suite telle que $v_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \times v_{n+1} < 0$. Cette inégalité nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, deux termes consécutifs v_n et v_{n+1} sont de signes opposés. Donc les termes v_{n+1} et v_{n+2} le sont aussi. Donc on peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n et v_{n+2} sont de même signe.

Donc $v_0, v_2, \ldots, v_{2k}$, avec $k \in \mathbb{N}$ (tous les termes de rangs pairs), sont de même signe, donc du signe de k.

Réponse c

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2w_n - 4$ et $w_2 = 8$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{w_{n+1} + 4}{2}$.

$w_1 = \dfrac{w_2 + 4}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6$ et $w_0 = \dfrac{w_1 + 4}{2} = \dfrac{6+4}{2} = 5$ **Réponse b**

6. Il est facile de démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ car $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} > 0$ et $a_0 > 0$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^n < \mathrm{e}^n + 1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} < 1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} a_n < a_n$ donc $a_{n+1} < a_n$. La suite (a_n) est donc strictement décroissante. **Réponse b**

7. D'après l'énoncé, nous savons que le nombre de cellules double à chaque intervalle de temps écoulé. Cherchons le premier entier n tel que $2^n \geqslant 4\,000$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

   $2^n \geqslant 4\,000 \iff \ln(2^n) \geqslant \ln(4\,000) \iff n \times \ln(2) \geqslant \ln(4\,000) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(4\,000)}{\ln(2)}$.

   À la calculatrice : $\dfrac{\ln(4\,000)}{\ln(2)} \approx 11,97$ donc $n \geqslant 12$.

   Il s'est donc écoulé 12 intervalles de temps pour que le nombre de cellules atteigne 4 000 en 4 heures. Chaque intervalle de temps est donc : $\dfrac{4 \times 60}{12} = 20$ (min.). **Réponse c**

EXERCICE 4 6 points Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ; Suites

Partie A

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue en 0 et $\mathrm{e}^{-0} = 1$. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

2. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,1]$.

   $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-x} + 1}{x} = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$

3. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, dérivable de dérivée $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. Or $\forall x \in]0\,;\,1]$, $-\mathrm{e}^{-x} < 0$. donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$.

   Donc $\forall x \in]0\,;\,1]$, : $e^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0 < 1$ donc $0 < \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0 < 1$. De plus $0 < x \leqslant 1$ donc $0 < x\mathrm{e}^{-x} < 1$.

   Cela signifie que $\forall x \in]0\,;\,1]$, $1 - x\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;\,1]$. $f(1) = \mathrm{e}^{-1} + \ln(1) = \mathrm{e}^{-1}$.

   Ci-dessous le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1
$f'(x)$	‖ +	
f	‖ $-\infty$ ↗	e^{-1}

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,1]$ à valeurs dans $]-\infty\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$. Or $0 \in]-\infty\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ, dans $]0\,;\,1]$.

   À la calculatrice : $\ell \approx 0,567$.

Partie B

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$

1. **a.** $a_1 = \text{e}^{-b_0} = \text{e}^{-1} \approx 0,37$ et $b_1 = \text{e}^{a_0} = \text{e}^{-\frac{1}{10}} \approx 0,90$.

b. Pour utiliser en Python la fonction exponentielle, il faut charger en premier la fonction *exp()* de la librairie "math" : *from math import exp*.

```
from math import exp
def termes(n) :
  a = 1/10
  b = 1
  for k in range(0, n) :
    c = exp(-b)
    b = exp(-a)
    a = c
  return(a, b)
```

2. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

Initialisation : $a_0 = \dfrac{1}{10}$ $\quad a_1 = \text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}}$ $\quad b_0 = 1 = \text{e}^0$ $\quad b_1 = \text{e}^{-\frac{1}{10}}$.

La fonction $x \mapsto \text{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1 \leqslant -\dfrac{1}{10} \leqslant 0$ donc , $\text{e}^{-1} \leqslant \text{e}^{-\frac{1}{10}} \leqslant \text{e}^0$ et $\dfrac{1}{\text{e}} > \dfrac{1}{10}$ donc on peut alors affirmer que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

Montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction $x \longmapsto \text{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1 \iff \text{e}^{-0} > \text{e}^{-a_n} \geqslant \text{e}^{-a_{n+1}} \geqslant \text{e}^{-b_{n+1}} \geqslant \text{e}^{-b_n} \geqslant \text{e}^{-1}$

soit $0 < \text{e}^{-1} \leqslant \text{e}^{-b_n} \leqslant \text{e}^{-b_{n+1}} \leqslant \text{e}^{-a_{n+1}} \leqslant \text{e}^{-a_n} < 1 \leqslant 1$ donc

$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. On obtient ce qu'il fallait démontrer.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$ et que $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (a_n) converge.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (b_n) converge.

3. **a.** $A = \text{e}^{-B}$ et $B = \text{e}^{-A}$.

$A = \text{e}^{-B} \iff \ln(A) = -B = -\text{e}^{-A}$ donc $\ln(A) + \text{e}^{-A} = 0$ donc $f(A) = 0$.

b. De même $B = \text{e}^{-A} \iff \ln(B) = -A = -\text{e}^{B}$ donc $\ln(B) + \text{e}^{-B} = 0$ donc $f(B) = 0$.

Donc A et B sont deux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or d'après la question A.4, cette équation admet une unique solution, donc $A = B$ et $A - B = 0$.