Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1
Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Exercice 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

On a pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 2}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Réponse **b.**

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $[2\,;\,+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles : réponse **c.**

3. On a pour tout naturel n :
$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5a_n + 1 - 2 = 0,5a_n - 1 = 0,5\left(a_n - 2\right) = 0,5b_n$.
l'égalité $b_{n+1} = 0,5b_n$ montre que la suite $\left(b_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,5.
Réponse **d.**

4. • Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$;
   • On a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$.
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{n}{n+1} = 1$.
   • L'encadrement vrai pour tout naturel n, donne : $1 \leqslant \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 1$.
   Ce théorème des « gendarmes » montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Réponse **b.**

5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.
Une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est définie par :
Si $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2\ln x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x^2 = x^2\ln x = f(x)$. Réponse **a.**

6. Pour tout réel x, l'expression $2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ est égale à :
$2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x}+2+3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{5\mathrm{e}^{-x}-3}{\mathrm{e}^{-x}+1}$; en multipliant chaque terme par e^x, on obtient : $\dfrac{5-3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$: réponse **a.**

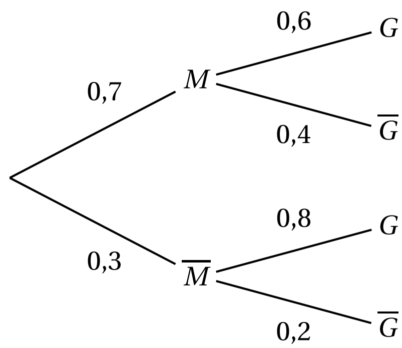
Exercice 2 7 points **Thème probabilités**

1. **a.** On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06 \iff p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$, soit

$0,06 = 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$.

b.



c. On calcule $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. On calule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$. L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0,42(12+g)+12\times 0,28+0,24\times g+0\times 0,06 = 5,04+0,42g+3,36+0,24g = 8,4+0,66g$.

Le responsable veut que :

$8,4+0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

   La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100;0,66)$.

   Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $\approx 0,9797$, soit 0,980 au millième près.

Exercice 3 7 points **Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geqslant 1$:

   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

   b.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   Comme quel que soit x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1-\ln x$:

   - $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$;
   - $1-\ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}~;~]+\infty[$.
   - $1-\ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$.

   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction est strictement croissante de $-\infty$ à $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $f(k) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ a donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

   b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. • *initialisation*: $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
   • *Hérédité*
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
   Par croissance de la fonction g :
   $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\mathrm{e})$ soit
   $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(\mathrm{e})$
   Or $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{4}} \approx 1{,}97$; donc $g(\mathrm{e}) \leqslant \mathrm{e}$ et l'encadrement précédent devient :
   $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \mathrm{e}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence :
   quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. L'encadrement précédent montre :

   — que la suite (u_n) est croissante ;

   — que la suite (u_n) est majorée par e

   donc que la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leqslant \mathrm{e}$.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. Quel que soit $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction logarithme népérien.

Or $\dfrac{x}{4} = \ln x \iff \dfrac{1}{4} = \dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement :

$f(x) = \dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,367$ et $\dfrac{1}{4} = 0,25$.

D'après la question **3. a.** de la partie A l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0,346$;

$f(1,4) \approx 0,24$ et $f(1,5) \approx 0,27$, donc $1,4 < \ell < 1,5$;

$f(1,42) \approx 0,247$ et $f(1,43) \approx 0,251$, donc $1,42 < \ell < 1,43$;

$f(1,429) \approx 0,2498$ et $f(1,430) \approx 0,2501$, donc $1,429 < \ell < 1,430$;

Finalement $\ell \approx 1,43$ au centième près.

Exercice 4 7 points **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad \mathrm{B}(1\,;\,1\,;\,2),\qquad \mathrm{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $\mathrm{D}(-1\,;\,6\,;\,8)$ et $\mathrm{E}(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Avec $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{DE}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 &=& 4t\\ y-6 &=& -5t\\ z-8 &=& -2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 6-5t\\ z &=& 8-2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

b. Une équation de la droite Δ' ne doit pas comporter de termes constants, donc par exemple : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t\\ y &=& -5t\\ z &=& -2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\mathrm{F}(1,36\,;\,-1,7\,;\,-0,7) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1,36 &=& 4t\\ -1,7 &=& -5t\\ -0,7 &=& -2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0,34$ et la dernière $t = 0,35$. Donc $\mathrm{F} \notin (\Delta)$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 8-10+2=0$;

De même $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC} = 8+0-8=0$.

Donc $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ; il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

Or $\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3) \in (\text{ABC}) \iff 4\times(-1)-5\times(-1)-2\times3+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $-5+d=0 \iff d=5$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4)\in\Delta \iff \begin{cases} 7 &= -1+4t\\ -4 &= 6-5t\\ 4 &= 8-2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution $t=2$, donc $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4)\in\Delta$.

b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= -1+4t\\ y &= 6-5t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}\\ z &= 8-2t\\ 4x-5y-2z+5 &= 0\end{cases}$$

En replaçant x, y, z par leur valeur en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0 \iff -4+16t-30+25t-16+4t+5=0 \iff 45t-45=0 \iff 45t=45 \iff t=1$.

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4\,;\,6-5\,;\,8-2)$ soit $\text{H}(3\,;\,1\,;\,6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

Or $\text{GH}^2=(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2=16+25+4=45$, d'où $\text{GH}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

4. **a.** D'après la question **2. a.**, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2+2\times0+4\times(-1)=4-4=0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est [flÎ], donc :

$V=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(\text{ABC})\times\text{GH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}\times\text{GH}$.

On a $\text{AB}^2=2^2+2^2+(-1)^2=4+4+1=9$, donc $\text{AB}=3$;

$\text{AC}^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20$, donc $\text{AC}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$.

Donc $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=15$.