Corrigé du baccalauréat Polynésie 5 mai 2022
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2+x+1\right).$$

La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

x^2+x+1 est une fonction positive sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions positives.

On pose $u(x) = x^2+x+1$ et on a $u'(x) = 2x+1$.

La fonction dérivée de $\ln(u(x))$ est la fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ soit la réponse d : $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. Pour déterminer si $f(x) = \ln(x)$ admet pour primitive l'une des fonctions citées, il suffit de les dériver.

Soit $g(x) = x\ln(x) - x$.

La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $g'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)+1-1 = \ln(x) = f(x)$.

La fonction g est donc une primitive de f soit la réponse c.

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n\left(\frac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}-1 = -1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n} = 0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}+1 = 1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1} = -1$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc finalement par produit de limites la limite de la suite (a_n) est égale à $-\infty$.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2]$ est donné par :

La fonction f est :

a. convexe sur $[-2\,;\,-1]$

b. concave sur $[0\,;\,1]$

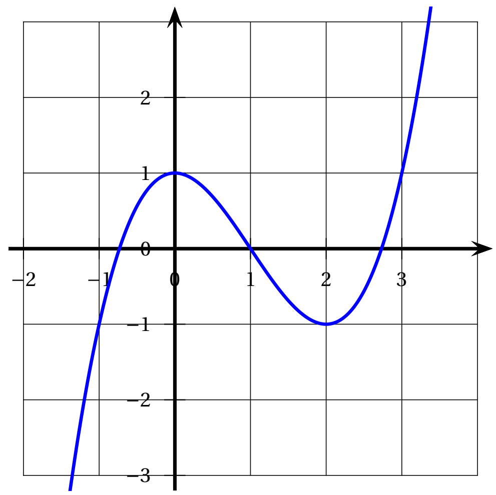
c. convexe sur $[-1\,;\,2]$

d. concave sur $[-2\,;\,0]$

Les variations de la dérivée donnent la convexité de la fonction, si f' est décroissante alors la fonction est concave.

Comme f' est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$, f est donc concave sur cet intervalle soit la réponse d

5. On donne ci-dessus la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.



Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction f.

En 1, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en 1.

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

Pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle soit la réponse a.

EXERCICE 2 7 points **Thèmes : probabilités**

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

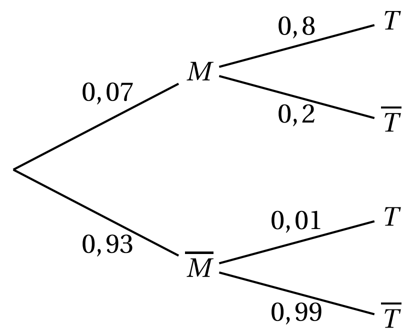
- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Soit l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,065 3.

M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653.$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

Il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.

Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

On cherche donc $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test est positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

On cherche $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées, on cherche $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ soit

$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \iff n \geqslant 68,19$

il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour que au moins une ait un test positif.

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. **a.** $u_1 = u_{n+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

   b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = 1
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u =u/(1+u)
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

   On calcule $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car u_n est strictement positif. La suite (u_n) est donc décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

   Comme (u_n) est décroissante est minorée par 0, elle est convergente vers une limite l positive ou nulle.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

   On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

   La fonction f est continue, car dérivable sur $\mathbb{R}^+$, la limite ℓ vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$.

   On résout l'équation $\dfrac{\ell}{1+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell(1+\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.

5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

   Au vu des premiers termes, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente. Soit p_n la propriété à démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   • Initialisation :

   pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc P_0 est vraie.

   • Hérédité :

   Supposons que P_n est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: la relation est vraie au rang $(n+1)$.

   P_{n+1} est donc vraie.

   Comme P_0 est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

EXERCICE 4 7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -4 + 7 - 3 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 5 - 6 + 12 = 11$ puis les longueurs $BA = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}$

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.

On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA} \times \text{BC} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\Leftrightarrow 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{77} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}} \approx 68°$ au degré près.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

De plus $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 \times (-1) - 1 \times 1 - 1 \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0$

et

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times 4 - 1 \times 7 - 1 \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a $5 + d = 0$ soit $d = -5$.

Une équation de (ABC) est donc $2x - y - z - 5 = 0$.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{E}M} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t,\quad t \in \mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t,\quad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) à pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide à ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

$AC = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathcal{B} = \dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$

HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\text{HE}}\begin{pmatrix} -3 \\ \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$

On a par suite $\text{HE} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\dfrac{27}{2}} = 16,5$ (car $\sqrt{6}\times\sqrt{27} = \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{9} = 3\times3\times\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$).