

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

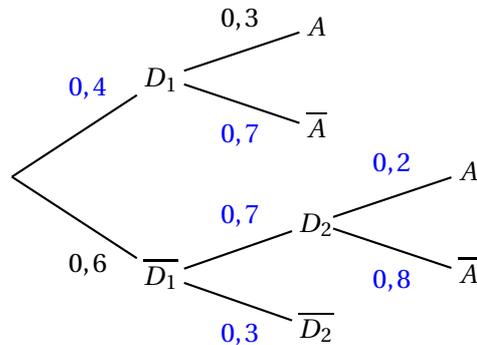
- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
 - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
 - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
 - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3;
 - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

- D_1 : « la personne décroche au premier appel »;
- D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;
- A : « la personne achète le produit ».

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré.



2. En utilisant les propriétés de l'arbre pondéré, on a :

$$P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204$$

3. On sait que la personne a acheté le produit.

La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est :

$$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx 0,588$$

Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,204.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

- a. On admet que X suit une loi binomiale; ses paramètres sont $n = 30$ et $p = 0,204$.
- b. La probabilité qu'exactly 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est :

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx 0,179$$

- c. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12$.
Donc pour chaque échantillon de 30 personnes, il y en a en moyenne 6,12 qui achètent le produit.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de n personnes.
La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99 est le plus petit entier naturel n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0,99 &\iff 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \iff 0,01 \geq P(X = 0) \\ &\iff 0,01 \geq \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n \iff 0,01 \geq 0,796^n \\ &\iff \ln(0,01) \geq \ln(0,796^n) \iff \ln(0,01) \geq n \ln(0,796) \iff \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \leq n \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,2$ donc la valeur de n cherchée est 21.

EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On cherche les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3x + 1 - 2x \ln(x)) = 1$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.
- $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty$.
On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$ et donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = 3 + 0 - 2 \times \ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$.

- b. On étudie le signe de f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \frac{1}{2} > \ln(x) \iff x < e^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3.$$

On en déduit le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de f'		+	-
Variations de f	1	$2e^{\frac{1}{2}} + 1$	$-\infty$

3. a. Le maximum de la fonction f vaut $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$; on complète le tableau des variations de f .

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	α	$+\infty$
Variations de f	1	$2e^{\frac{1}{2}} + 1$	0	$-\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle $] -\infty, e^{\frac{1}{2}}[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur l'intervalle $] e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α .

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $] e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

b. Le signe de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est donné par le tableau :

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	α	$+\infty$
Variations de f	1	$2e^{\frac{1}{2}} + 1$	0	$-\infty$
Signe de f		+	0	-

Donc $f(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On la note F . La fonction F a pour dérivée la fonction f qui est positive sur $] e^{\frac{1}{2}}; \alpha [$; donc F est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée.

5. a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$, on calcule la dérivée seconde f'' :
 $f''(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} < 0$ sur $]0; +\infty[$; on en déduit que la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$ et que sur cet intervalle, la courbe \mathcal{C}_f est située au dessous des ses tangentes.

b. Soit T la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

T a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

- $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$ donc $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4$
- $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$ donc $f'(1) = 1 - 2 \times \ln(1) = 1$

Donc T a pour équation $y = 1(x - 1) + 4$ soit $y = x + 3$.

c. La courbe \mathcal{C} est en dessous de ses tangentes donc de la tangente T et donc, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $f(x) \leq x + 3$.

$$f(x) \leq x + 3 \iff 3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3 \iff 2x - 2 \leq 2x \ln(x) \iff \frac{2x}{2x} - \frac{2}{2x} \leq \ln(x)$$

$$\iff 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$$

Donc, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

EXERCICE 3

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

Partie A

1. La valeur de u_2 est égale à :

- a. $\frac{11}{4}$
- b. $\frac{13}{2}$
- c. 3,5
- d. 2,7

$$\begin{cases} u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{5}{2} \\ u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Réponse a.

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$ est :

- a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$
- b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- c. constante.
- d. ni arithmétique, ni géométrique.

$$\begin{cases} v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n \\ \text{Donc la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Réponse b.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

1	def terme (n)
2	U=3
3	for i in range(n) :
4
5	return U

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n , on peut compléter la ligne 4 par :

- a. $U = U/2 + (i+1)/2+1$
- b. $U = U/2 + n/2 + 1$
- c. $U = U/2 + (i-1)/2+1$
- d. $U = U/2 + i/2 + 1$

|| Pour $i = 0$, il faut calculer u_1 ; la seule formule valable est : $U = U/2 + i/2 + 1$. **Réponse d.**

Partie B

1. On va démontrer par récurrence pour tout entier naturel n la propriété $\mathcal{P}_n : n \leq u_n \leq n + 3$.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ donc $0 \leq u_0 \leq 0 + 3$.
La propriété est vraie au rang 0.

• **Hérédité**

Supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $n \leq u_n \leq n + 3$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} n \leq u_n \leq n + 3 &\iff \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n \\ &\iff n \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \leq n + \frac{3}{2} \iff n + 1 \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \leq n + \frac{3}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{5}{2}$$

Or $\frac{5}{2} \leq 4$, donc on a : $n + 1 \leq u_{n+1} \leq (n + 1) + 3$.

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 3$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; or pour tout n , on a $n \leq u_n$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Pour tout n , on a $n \leq u_n \leq n + 3$ donc, pour tout n non nul, on a $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

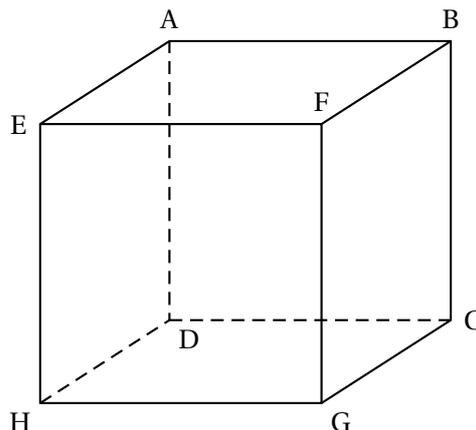
Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

EXERCICE 4

5 points

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que $AB = 1$.

On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

1. On a : $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Le point M est le centre de la face BCGF donc c'est le milieu de [CF]; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de C et de F :

$$M \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{x_C + x_F}{2} \\ \frac{y_C + y_F}{2} \\ \frac{z_C + z_F}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} \\ \frac{1+1}{2} \\ \frac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le point N est le centre de la face EFGH donc c'est le milieu de [FH]; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de F et de H :

$$N \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{x_F + x_H}{2} \\ \frac{y_F + y_H}{2} \\ \frac{z_F + z_H}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} \\ \frac{1+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. a. Le plan (HFC) a pour vecteurs directeurs \overrightarrow{HF} et \overrightarrow{CF} car les points H, F et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{HF} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CF} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{HF}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CF} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CF}$$

Le vecteur \overrightarrow{AG} est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (HFC) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

- b. Le plan (HFC) passe par le point F et a pour vecteur normal \overrightarrow{AG} , c'est donc l'ensemble des points X de coordonnées (x, y, z) tels que $\overrightarrow{FX} \perp \overrightarrow{AG}$.

$$\overrightarrow{FX} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FX} \perp \overrightarrow{AG} &\iff \overrightarrow{FX} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times (-1) = 0 \\ &\iff x-1+y-1-z+1=0 \iff x+y-z-1=0 \end{aligned}$$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne : $x + y - z - 1 = 0$.

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG} (1, 1, -1)$ et passe par le point A de coordonnées $(0, 0, 1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + 1 \times t \\ y = y_A + 1 \times t \\ z = z_A + (-1) \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Soit R le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC). donc R appartient au plan (HFC).

De plus, comme la droite (AG) est orthogonale au plan (HFC), le point R appartient à la droite (AG).

$$\text{Les coordonnées de R vérifient donc le système : } \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1 - t \\ x + y - z - 1 &= 0 \end{cases}$$

On a donc $t + t - (1 - t) - 1 = 0$ donc $3t = 2$ donc $t = \frac{2}{3}$.

Donc R a pour coordonnées $x_R = t = \frac{2}{3}$, $y_R = t = \frac{2}{3}$, $z_R = 1 - t = \frac{1}{3}$, soit $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6. Une représentation paramétrique de la droite (FG) est : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

On cherche un point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

K est un point de (FG) donc ses coordonnées sont de la forme $(1, 1, t)$.

De plus, le triangle KMN est rectangle en K donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{NK}$ donc $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{NK} = 0$.

$$\overrightarrow{MK} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1-1 \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NK} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-\frac{1}{2} \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{NK} = 0 \iff \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \times \left(t - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff t = \frac{1}{2}$$

Le point K a donc pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

7. Le tétraèdre FNKM a pour hauteur [FK] et pour base le triangle KMN.

- F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et K a pour coordonnées $(1, 1, \frac{1}{2})$; donc $FK = \frac{1}{2}$.
- L'aire du triangle rectangle KMN est $\frac{KM \times KN}{2}$.
 - $M(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ et $K(1, 1, \frac{1}{2})$ donc $KM = \frac{1}{2}$
 - $N(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $K(1, 1, \frac{1}{2})$ donc $KN = \frac{1}{2}$

L'aire du triangle KMN est donc $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$.

- Le volume d'un tétraèdre est, en unité de volume : $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Le volume du tétraèdre FNKM est donc : $\frac{(\text{aire de KMN}) \times FK}{3} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{48}$.

Le volume du cube est 1, celle du tétraèdre FNKM est $\frac{1}{48}$ donc le volume du tétraèdre représente un quarante-huitième du volume du cube.

