∽ Corrigé du baccalauréat LA RÉUNION 29 mars 2023 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

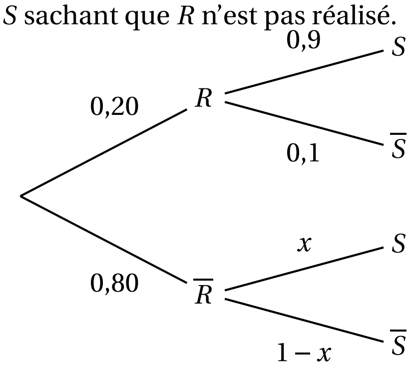
Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Partie A

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. D'après la loi des probabilités totales : $P(S) = P(R \cap S) + P\left(\overline{R} \cap S\right)$ Or :
   - $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et
   - $P\left(\overline{R} \cap S\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,8 \times x = 0,8x$ et comme $P(S) = 0,82$, on a donc l'équation :

   $0,18 + 0,8x = 0,82 \iff 0,8x = 0,64 \iff x = 0,8.$

3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
   Il faut calculer $P_S(R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(S)} = \dfrac{0,18}{0,82} = \dfrac{18}{82} = \dfrac{9}{41} \approx 0,219$, soit 0,22 au centième près.

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
   On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   a. Les paramètres de la loi binomiale sont $n = 5$ et $p = 0,82$.
   b. Il faut trouver $P(X \leqslant 3) \approx 0,2223$, d'après la calculatrice soit 0,222 au millième près.
2. **a.** On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   La probabilité qu'un acheteur soit satisfait est égale à 0,82, la probabilité que deux acheteurs soient satisfaits est $0,82^2$, ..., la probabilité que les n acheteurs soient satisfaits est égale à $0,82^n$.

b. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$p_n < 0,01 \iff 0,82^n < 0,01 \iff n \ln 0,82 < \ln 0,01$ par croissance de la fonction logarithme népérien soit encore

$n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,82}$. (car $\ln 0,82 < 0$). Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,82} \approx 23,2$.

Il faut donc au minimum 24 acheteurs.

Moins de 1 % des acheteurs seront tous satisfaits si leur nombre dépasse 23.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Pour $n = 0$, on a $u_1 = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \dfrac{50}{13}$.

2.

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

a. Le dénominateur étant supérieur à 4 ne s'annule pas : la fonction f est donc dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{6(x+5) - 1(6x+2)}{(x+5)^2} = \dfrac{6x + 30 - 6x - 2}{(x+5)^2} = \dfrac{28}{(x+5)^2}$:quotient de deux nombres supérieurs à zéro cette dérivée est supérieure à zéro : la fonction f est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$ et son minimum est $f(0) = \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

On a $f(2) = \dfrac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \dfrac{14}{7} = 2$.

Or comme f est croissante sur $[0~;~+\infty[$: $x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2$ d'après le calcul précédent.

b. *Initialisation* : $u_0 = 8 > 2$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$.

Alors par croissance de la fonction f : $f(u_n) > f(2) = 2$.

Or $f(u_n) = u_{n+1}$: on a donc $u_{n+1} > 2$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$. Par le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

a. On a $u_n > 2 \implies u_n + 1 > 2 + 1 > 0$ et $u_n > 2 \implies u_n + 5 > 2 + 5 > 0$.

Le signe du quotient précédent est donc celui de $2 - u_n$; or $u_n > 2 \implies$
$0 > 2 - u_n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 2$.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a. $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

b. On sait que $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$

Or $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1}$ et en utilisant la relation précédente :

$$v_{n+1} = \dfrac{\frac{6u_n+2}{u_n+5} - 2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5} + 1} = \dfrac{\frac{6u_n+2}{u_n+5} - \frac{2u_n+10}{u_n+5}}{\frac{6u_n+2}{u_n+5} + \frac{u_n+5}{u_n+5}} = \dfrac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \dfrac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \dfrac{4}{7}v_n.$$

La relation $v_{n+1} = \dfrac{4}{7}v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

c. • On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$ ou encore $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.

Or comme $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$ et par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et comme $u_n + 1 > 2 + 1 > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0$, soit enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. Donc $\ell = 2$.

d. On vérifie à la calculatrice que $u_{14} \approx 2{,}000\,79$ est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.

EXERCICE 3 — 5 points

On considère le point A$(1\,;\,1\,;\,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x + 4y + 2z + 1 = 0$.

1. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\,\overrightarrow{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(v) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 0t\\ y-1 &=& 2t\\ z-0 &=& -t\end{array}\right., t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1+2t\\ z &=& -t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

2. Un point de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite (d) et au plan $\mathscr{P}$ si ces coordonnées les équations de la droite et du plan soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1+2t\\ z &=& -t\\ x+4y+2z+1 &=& 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$1 + 4(1+2t) + 2 \times (-t) + 1 = 0 \iff 1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0 \iff 6t + 6 = 0 \iff t = -1$

En remplaçant t par -1 dans les trois équations de (d), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1-2\\ z &=& 1\end{array}\right.$$

On a donc B$(1\,;\,-1\,;\,1) \in (d) \cap \mathscr{P}$.

3. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisque les deux premières coordonnées sont égales mais pas les troisièmes. ; les points A, B et C non alignés définissent bien le plan (ABC).

b. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 0+0+0=0$ et
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 0+0+0=0$.
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc normal à ce plan.

c. On sait qu'alors $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{ABC}) \iff x\times1+y\times0+z\times0+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Or $\text{A}(1\,;\,1\,;\,0)\in(\text{ABC}) \iff 1\times1+d=0 \iff d=-1$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{ABC}) \iff x-1=0$.

4. **a.** $\text{AB}^2=\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2 = 0^2+(-2)^2+1^2=4+1=5$;
$\text{AC}^2=\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2 = 0^2+(-2)^2+(-1)^2=4+1=5$.
On a donc $\text{AB}^2=\text{AC}^2 \implies \text{AB}=\text{AC}$: le triangle ABC est isocèle en A.

b. On a $\text{H}\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\,\dfrac{(-1)+(-1)}{2}\,;\,\dfrac{1-1}{2}\right)$ soit $\text{H}(1\,;\,-1\,;\,0)$.
On a donc $\text{AH}^2=(1-1)^2+(-1-1)^2+(0-0)^2=4$, d'où $\text{AH}=2$.
ABC étant isocèle en A, la droite (AH) médiane est aussi hauteur relative au côté [BC].
O a donc $\mathscr{A}(\text{ABC})=\dfrac{\text{BC}\times\text{AH}}{2}$.
Comme $\text{BC}^2=(1-1)^2+(-1+1)^2+(-1-1)^2=0+0+4$, d'où $\text{BC}=2$.
Donc $\mathscr{A}(\text{ABC})=\dfrac{2\times2}{2}=2$.

5. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

a. Avec $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BD}}=-\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal au plan (ABC), donc $\overrightarrow{\text{BD}}$ aussi et par conséquent la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

b. Pour la pyramide ABCD on prend comme base le triangle (ABC) et comme hauteur le segment [BD], d'où :
$\mathscr{V}(\text{ABCD})=\dfrac{\mathscr{A}\text{ABC})\times[\text{BD}]}{3}$.
Avec $\text{BD}^2=\left\|\overrightarrow{\text{BD}}\right\|^2=(-1)^2+0^2+0^2=1$, on a donc $\text{BD}=1$ et
$\mathscr{V}(\text{ABCD})=\dfrac{2\times1}{3}=\dfrac{2}{3}$ en unité d'aire.

EXERCICE 4 — 5 points

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x\text{e}^x$.
La fonction f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et pour tout réel :
$f'(x)=2\text{e}^x+2x\text{e}^x=2\text{e}^x(1+x)$. cette dérivée est du signe de $1+x$.
On a donc $f'(x)<0 \iff x<-1$: la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^x=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $f(-1)=2\times(-1)\times\text{e}{-1}=-2\text{e}^{-1}\approx -0,74$.

De même $f'(x) > \iff x > -1$: la fonction est croissante sur $[-1~;~+\infty[$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$, la fonction f croit de $f(-1) < 0$ à plus l'infini.

La fonction f étant continue car dérivable et strictement croissante prend donc une seule fois la valeur $-0,73$. Réponse **c.**

2.

$$g(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}.$$

On a $g(x) = (x+1) \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. Or :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ et

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Réponse **a.**

3.

$$h(x) = (4x-16)\mathrm{e}^{2x}.$$

La fonction h produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et pour tout réel :

$h'(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + 2(4x-16)\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(4+8x-32) = \mathrm{e}^{2x}(8x-28)$.

$h''(x) = 8\mathrm{e}^{2x} + 2(8x-28)\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(8+16x-56) = \mathrm{e}^{2x}(16x-48) = 16\mathrm{e}^{2x}(x-3)$.

Comme $4\mathrm{e}^{2x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $h''(x)$ est celui de $x-3$.

Donc la dérivée seconde s'annule en $x = 3$ en changeant de signe, donc le point de coordonnées $\left(3~;~-4\mathrm{e}^6\right)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$. Réponse **b.**

4.

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

Une équation de T est : $M(x~;~y) \in (T) \iff y - k(\mathrm{e}) = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})$.

Avec $k(\mathrm{e}) = 3\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} = 3 - \mathrm{e}$ et

$k'(x) = \dfrac{3}{x} - 1$, d'où $k'(\mathrm{e}) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1 = \dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$, on obtient donc :

$M(x~;~y) \in (T) \iff y - (3-\mathrm{e}) = \dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) \iff y = \dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x - 3 + \mathrm{e} + 3 - \mathrm{e} \iff y = \dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x$ (cette droite contient l'origine). Réponse **b.**

5. $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0~;~+\infty[$.

En posant $X = \ln x$, l'équation devient : $X^2 + 10X + 21 = 0$.

Avec $\Delta = 10^2 - 4\times 21 = 100 - 84 = 16 = 4^2$, les solutions sont :

$$\left\{\begin{array}{l c l} X_1 & = & \dfrac{-10-4}{2}\\ X_2 & = & \dfrac{-10+4}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} X_1 & = & -7\\ X_2 & = & -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \ln x_1 & = & -7\\ \ln x_2 & = & -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & \mathrm{e}^{-7}\\ x_2 & = & \mathrm{e}^{-3}\end{array}\right.$$

Cette équation a donc deux solutions. Réponse **c.**