

❧ Corrigé du baccalauréat Métropole et La Réunion ❧

Sujet 2 – 12 septembre 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**EXERCICE 1**

**5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache. On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée. Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie. Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ». On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

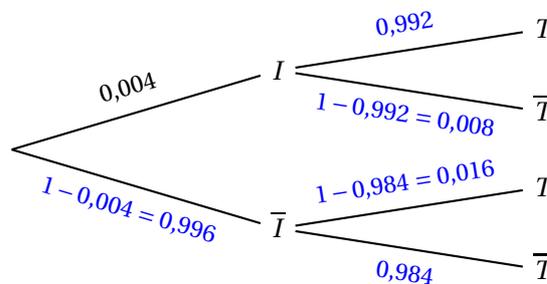
On désigne par :

- $I$  l'évènement « la vache est atteinte par l'infection »;
- $T$  l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note  $\bar{I}$  l'évènement contraire de  $I$  et  $\bar{T}$  l'évènement contraire de  $T$ .

**Partie A**

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. a. La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est :  $P(\bar{I} \cap \bar{T}) = 0,996 \times 0,984 \approx 0,980$ .

- b. La probabilité que la vache présente un test positif est  $P(T)$ .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,004 \times 0,992 + 0,996 \times 0,016 = 0,019904 \text{ soit } 0,020 \text{ à } 10^{-3} \text{ près,}$$

- c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire :  $P_T(I)$ .

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,004 \times 0,992}{0,02} \approx 0,199$$

- d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de  $P(\bar{I} \cap T)$ , ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de  $P(I \cap \bar{T})$ .

La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc :  $P(\bar{I} \cap T) + P(I \cap \bar{T}) = 0,996 \times 0,016 + 0,004 \times 0,008 \approx 0,160$ .

**Partie B**

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note  $X$  la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

- a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité  $p = 0,02$ ) ou non; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille  $n = 100$  en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,02$ .

- b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est :  $P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0,02^3 \times (1 - 0,02)^{100-3} \approx 0,182$ .

- c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est :  $P(X \leq 3) \approx 0,859$  (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de  $n$  vaches dans cette région,  $n$  étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de  $n$  pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que  $P(X \geq 1) \geq 0,99$ .

C'est-à-dire :  $1 - P(X = 0) \geq 0,99$  ou encore :  $0,01 \geq P(X = 0)$ .

On résout l'inéquation :  $P(X = 0) \leq 0,01$ .

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^{n-0} = 0,98^n$$

$$0,98^n \leq 0,01 \iff \ln(0,98^n) \leq \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,98) \leq \ln(0,01) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)}$$

Or  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)} \approx 227,95$  donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

**EXERCICE 2****5 points**

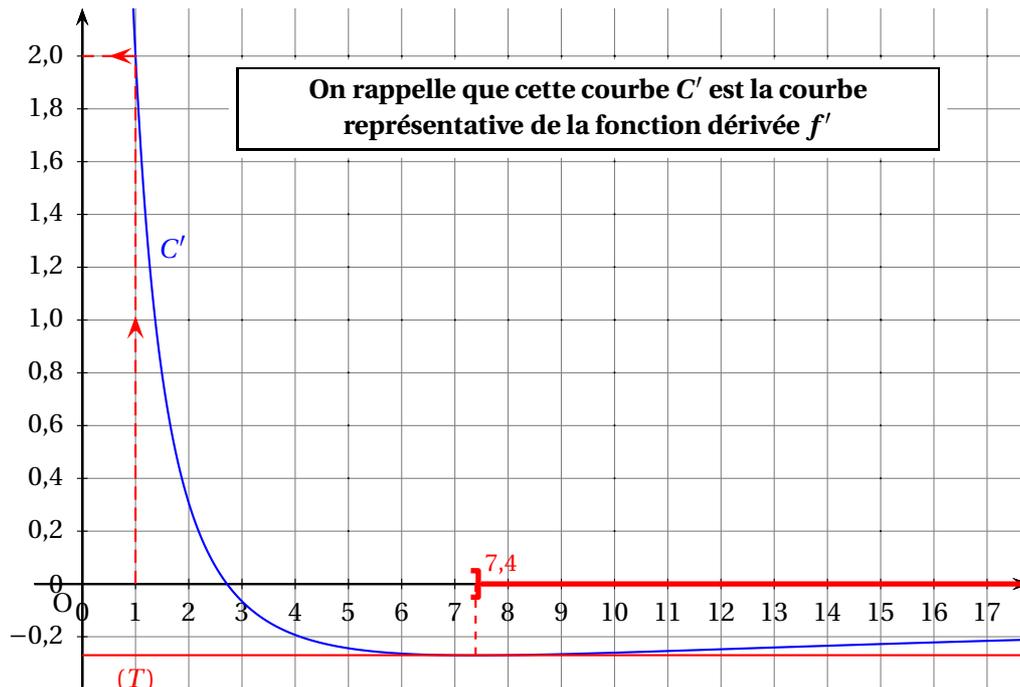
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ . On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal et  $C'$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ , fonction dérivée de la fonction  $f$ .

La **courbe  $C'$**  est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale ( $T$ ).

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1 est  $f'(1)$ ; graphiquement, c'est environ 2.
- b. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe est le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f'$  est croissante, soit  $[7,4; +\infty[$ .

$$2. \quad a. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln x = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) \times \ln x = -\infty \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$



b. 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln x = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \ln x) \times \ln x = -\infty \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

On en déduit que la courbe  $C$  admet la droite d'équation  $x = 0$  comme asymptote verticale.

3. Les abscisses des points d'intersection de la courbe  $C$  et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation  $f(x) = 0$ ; on résout cette équation.

$$f(x) = 0 \iff (2 - \ln x) \times \ln x = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff \ln x = 2 \text{ ou } \ln x = 0 \\ \iff x = e^2 \text{ ou } x = 1$$

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $C$  et de l'axe des abscisses sont donc  $(1; 0)$  et  $(e^2; 0)$ .

4. a. Pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ :

$$f'(x) = \left(0 - \frac{1}{x}\right) \times \ln x + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{2 - \ln x}{x} = \frac{2 - 2\ln x}{x} = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$

b.  $f'(x)$  s'annule et change de signe quand  $1 - \ln x = 0$ , donc pour  $x = e$ .

$$f(e) = (2 - \ln e) \times \ln e = (2 - 1) \times 1 = 1$$

D'où le tableau de variations de la fonction  $f$ :

$x$	0		$e$		$+\infty$
$x$	0	+		+	
$1 - \ln x$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗ 1 ↘			
		$-\infty$			$-\infty$

5. On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$  et on admet que sur  $]0; +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$ .

La fonction  $f$  est convexe si et seulement si  $f''(x) \geq 0$ ; on résout cette inéquation.

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{2(\ln x - 2)}{x^2} \geq 0 \iff \ln x - 2 \geq 0 \iff \ln x \geq 2 \iff x \geq e^2$$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe est donc  $[e^2; +\infty[$ .

$$f''(x) = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff x = e^2 \text{ et } f(e^2) = (2 - \ln e^2) \times \ln e^2 = 0$$

Donc la courbe  $C$  admet le point de coordonnées  $(e^2; 0)$  comme point d'inflexion.

**EXERCICE 3****5 points**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ \text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$$

1. • Pour  $n = 1$  :  $u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1}\right) u_1 = \frac{1}{e} (2) \frac{1}{e} = \frac{2}{e^2}$

• Pour  $n = 2$  :  $u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{2}\right) u_2 = \frac{1}{e} \left(\frac{3}{2}\right) \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^3}$

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel  $n$  donné, affiche le terme  $u_n$ . On complète les lignes  $L_2$  et  $L_4$  de ce programme.

$L_1$	<code>def suite(n):</code>
$L_2$	<code>    u = 1/e</code>
$L_3$	<code>    for i in range(1, n):</code>
$L_4$	<code>        u = 1/e*(1+1/i)*u</code>
$L_5$	<code>    return u</code>

3. On admet que tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont strictement positifs.

a.  $n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{n} \leq 2$  donc  $1 + \frac{1}{n} \leq e$

b.  $1 + \frac{1}{n} \leq e$  donc  $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$

Or pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ , donc :  $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \leq u_n$  c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante.

c. Pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.

On a démontré que cette suite était décroissante donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

4. a. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n = \frac{n}{e^n}$ .

- **Initialisation**

Pour  $n = 1$  :  $u_1 = \frac{1}{e}$  et  $\frac{n}{e^n} = \frac{1}{e}$

Donc la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

- **Hérédité**

On suppose que la propriété est vraie au rang  $n \geq 1$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{n}{e^n} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire pour tout  $n \geq 1$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

On a donc démontré que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $u_n = \frac{n}{e^n}$ .

b. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$  et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**EXERCICE 4****5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère :

- les points  $A(-1; -2; 3)$ ,  $B(1; -2; 7)$  et  $C(1; 0; 2)$ ;
- la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ , où  $t \in \mathbb{R}$ ;
- le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :  $3x + 2y + z - 4 = 0$ ;
- le plan  $\mathcal{Q}$  d'équation cartésienne :  $-6x - 4y - 2z + 7 = 0$ .

1. Lequel des points suivants appartient au plan  $\mathcal{P}$ ?

- a.  $R(1; -3; 1)$ ;      b.  $S(1; 2; -1)$ ;      c.  $T(1; 0; 1)$ ;      d.  $U(2; -1; 1)$ .

$$\| \quad 3x_T + 2y_T + z_T - 4 = 3 + 0 + 1 - 4 = 0 \text{ donc } T \in \mathcal{P}$$

**Réponse c.**

2. Le triangle ABC est :

- a. équilatéral;      b. rectangle isocèle;  
c. isocèle non rectangle;      d. rectangle non isocèle.

$$\| \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ont respectivement pour coordonnées } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 0 \times 2 + 4 \times (-1) = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  donc ABC est rectangle en A.

$AB^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$  et  $AC^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$ , donc  $AB \neq AC$

Le triangle ABC n'est pas isocèle.

**Réponse d.**

3. La droite  $\Delta$  est :

- a. orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ ;      b. sécante au plan  $\mathcal{P}$ ;  
c. incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ ;      d. strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

$$\| \quad \text{La droite } \Delta \text{ a pour vecteur directeur } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ et le plan } \mathcal{P} \text{ a pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 1 = 0$  donc  $\vec{v} \perp \vec{n}$ , et donc  $\Delta$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ .

Le point H de coordonnées  $(1; 2; -4)$  appartient à  $\Delta$ .

$3x_H + 2y_H + z_H - 4 = 3 \times 1 + 2 \times 2 - 4 - 4 = -1 \neq 0$  donc  $H \notin \mathcal{P}$ .

La droite  $\Delta$  n'est pas incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

**Réponse d.**

4. On donne le produit scalaire  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20$ .

Une mesure au degré près de l'angle  $\widehat{ABC}$  est :

- a.  $34^\circ$ ;      b.  $120^\circ$ ;      c.  $90^\circ$ ;      d.  $0^\circ$ .

$$\| \quad \text{Le triangle ABC est rectangle en A donc l'angle } \widehat{ABC} \text{ est un angle aigu.}$$

**Réponse a.**

5. L'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  est :

- a. un plan;  
c. une droite;

- b. l'ensemble vide;  
d. réduite à un point.

Le plan  $\mathcal{P}$  a pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le plan  $\mathcal{Q}$  a pour vecteur normal  $\vec{n}' \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .  
 $\vec{n}' = -2\vec{n}$  donc les plans sont parallèles.  
Le point T appartient à  $\mathcal{P}$ .  
 $-6x_T - 4y_T - 2z_T + 7 = -6 \times 1 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 7 = -1 \neq 0$  donc  $T \notin \mathcal{Q}$   
Les deux plans sont donc strictement parallèles.

**Réponse b.**