Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord
Sujet 2 (secours) 22 mai 2025
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A : Étude de la fonction f

1.
   - Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:
     $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)-1.$
     Avec $y=-x$, par composition, on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty.$
     Donc, par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}+2 = +\infty.$
     Par limite du produit, il vient : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{x}+2\right) = -\infty.$
     Enfin, par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)-1 = -\infty.$
   - Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:
     D'après la propriété des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty.$
     Par limite de l'inverse : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$
     Par ailleurs, 2 étant positif : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty.$
     Par limite de la somme on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}+2x-1 = +\infty.$

2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, on a :

   $f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+2 = (1-x)\mathrm{e}^{-x}+2.$

3. On a admis que f' est dérivable :

   Pour tout réel x, on a :

   $f''(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x}+(1-x)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+0 = \left(-1-(1-x)\right)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$

   On arrive bien à l'expression annoncée.

4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$.

   - Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, $(x-2)\leqslant 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $]-\infty\,;\,2]$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $(x-2)\geqslant 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2\,;\,+\infty[$.

5.
   - Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

   f' atteindra donc un minimum pour $x=2$. On a :

   $f'(2) = (1-2)\mathrm{e}^{-2}+2 = 2-\mathrm{e}^{-2}$

   On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f'.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$ 0 $+$
variations de f'	$\searrow$ $2-\mathrm{e}^{-2}$ $\nearrow$

6. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{0} &\implies \mathrm{e}^{-2} \leqslant 1\\ &\implies -\mathrm{e}^{-2} \geqslant -1 \quad \text{car } -1<0\\ &\implies 2-\mathrm{e}^{-2} \geqslant 2-1\\ &\implies 2-\mathrm{e}^{-2} \geqslant 1\end{aligned}$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0,37 < \alpha < 0,38$.

8. Pour tout x réel, on a :

$f(x) - (2x-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x-1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x.

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ.

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour tout x réel, on pose : $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = x$.

On a donc, pour tout x réel : $v'(x) = 1$ et, par exemple : $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n xe^{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^n v(x)\times u'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_1^n - \int_1^n v'(x)\times u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est la formule d'intégration par parties}\\
&= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\times x\Big]_1^n - \int_1^n 1\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left(-n\mathrm{e}^{-n}\right)-\left(-\mathrm{e}^{-1}\right)+\int_1^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}\\
&= \mathrm{e}^{-1}-n\mathrm{e}^{-n}+\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^n\\
&= \mathrm{e}^{-1}-n\mathrm{e}^{-n}+\Big(-\mathrm{e}^{-n}-\left(-\mathrm{e}^{-1}\right)\Big)\\
&= 2\mathrm{e}^{-1}-(n+1)\mathrm{e}^{-n}
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression : $I_n = 2\mathrm{e}^{-1}-(n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

2. **a.** Le domaine décrit est donc situé entre la courbe C_f et la droite Δ, pour les abscisses comprises entre 1 et n. Le nombre n étant choisi entier naturel non nul, l'ensemble des abscisses concernées est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$, où la courbe C_f est au-dessus de la droite Δ, d'après la question **A. 8.**, c'est-à-dire que :

$\forall x \in [1\ ;\ n],\quad 2x-1 \leqslant f(x)$.

Pour obtenir l'aire de D_n, il faut donc intégrer la différence $f(x)-(2x-1)$, entre 1 et n (car $1 \leqslant n$).

Comme, pour tout x réel, on a : $f(x)-(2x-1) = x\mathrm{e}^{-x}$, l'aire de D_n (exprimée en unité d'aire) est donc bien égale à I_n.

b. On a, pour tout n entier naturel : $I_n = 2\mathrm{e}^{-1}-(n+1)\mathrm{e}^{-n} = 2\mathrm{e}^{-1}-n\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-n}$.

Avec le même raisonnement que celui tenu à la question **A. 1.**, on a :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n} = 0$.

On a également : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{n}} = 0$.

On a donc, par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On est donc dans la situation d'un domaine dont le périmètre tend vers $+\infty$, puisqu'il s'étend sur une amplitude en abscisse qui tend vers $+\infty$, mais dont la surface reste majorée.

EXERCICE 2 — 5 points

1. Affirmation : Vraie

Par simple lecture des systèmes de représentation paramétrique, on peut dire que D est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et D′ par $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\-6\\-8\end{pmatrix}$.

On remarque que : $\overrightarrow{u'} = -2\overrightarrow{u}$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires, et donc les deux droites sont parallèles entre elles.

2. Affirmation : Fausse

De façon générale, si A, B et C définissent un plan, alors D sera orthogonale au plan (ABC) si et seulement si son vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, classiquement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

La **méthode classique** serait donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs, et d'en faire le produit scalaires avec $\overrightarrow{u}$.

Cela donne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-3\\-4-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

On a (avec les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ déterminées à la question **1.**) le produit scalaire qui se calcule au moyen des coordonnées (on suppose que le repère est orthonormé).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u} = 3\times(-1)+0\times3+(-5)\times4 = -23 \neq 0$.

Comme ce produit scalaire n'est pas nul, pas besoin de calculer le second : on peut affirmer que D n'est pas orthogonale à (ABC), car elle n'est pas orthogonale à (AB) qui est une droite du plan (ABC).

Ici, on peut cependant adopter une **méthode différente** : on repère que les trois points A, B et C partagent la même ordonnée : 3, et sont réputés non alignés, donc le plan ABC est le plan d'équation $y = 3$, et un vecteur normal à (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{j}$. Comme $\overrightarrow{j}$ est clairement non colinéaire à $\overrightarrow{u}$, alors on peut en déduire que D n'est pas orthogonale à (ABC).

3. Affirmation : Fausse

D est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et Δ est dirigée par $\overrightarrow{u''}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, qui est clairement non colinéaire à $\overrightarrow{u}$: les droites ne sont donc pas parallèles. Elles peuvent être soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour trancher, cherchons s'il existe un couple de paramètres $(t\ ;\ t')$ tel que le point de paramètre t sur D serait confondu avec le point de paramètre t' sur Δ, autrement dit : s'il existe un point commun aux deux droites.

On résout le système :

$$\begin{cases}3-t=-4+2t'\\-2+3t=1-3t'\\1+4t=2+t'\end{cases} \iff \begin{cases}-t=-7+2t'\\-3+3t+3t'=0\\-1+4t-t'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=7-2t'\\-3+3(7-2t')+3t'=0\\-1+4(7-2t')-t'=0\end{cases} \iff \begin{cases}t=7-2t'\\-3+21-6t'+3t'=0\\-1+28-8t'-t'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=7-2t'\\3t'=18\\9t'=27\end{cases} \iff \begin{cases}t=7-2t'\\t'=6\\t'=3\end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, et les droites D et Δ n'ont aucun point commun : elle ne sont donc pas sécantes.

4. **Affirmation : Vraie**

   Le point F$(-3;-3;3)$ appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation du plan, en effet :

   $2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2\times(-3) - 3\times(-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0$.

   De plus, $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3-(-5)\\-3-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur a les même coordonnées que le vecteur normal du plan que l'on peut obtenir par lecture de l'équation de P.

   Ainsi, la droite (EF) est une droite orthogonale au plan P, telle que F $\in P$, donc F est bien le projeté orthogonal du point E$(-5;0;2)$ sur le plan P.

5. **Affirmation : Fausse**

   Par lecture de l'équation de P', celui-ci admet comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\-a^2\end{pmatrix}$. La droite D est toujours dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$.

   Le produit scalaire $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}$ vaut : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = -3\times(-1) + 1\times 3 + (-a^2)\times 4 = 6 - 4a^2$.

   D est parallèle à P' si et seulement si le vecteur directeur de D est un vecteur directeur de P', c'est-à-dire si et seulement si le vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P'.

   Autrement dit, D est parallèle à P' si et seulement si $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ donc si et seulement si $6 - 4a^2 = 0$ c'est à dire $a^2 = \dfrac{6}{4}$ soit $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $a = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

   Il existe donc deux valeurs du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D.

EXERCICE 3 — 5 points

1. Ici, on interroge une personne au hasard, donc toutes les personnes qui constituent la population du pays ont la même probabilité d'être choisis : c'est une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

   On a donc :

   - $P(C) = 0,02$, car 2 % de la population du pays a été contaminée ;
   - $P(V) = 0,9$, car 90 % de la population a été vaccinée ;
   - $P_C(V) = 0,62$, car 62 % des personnes contaminées ont été vaccinées.

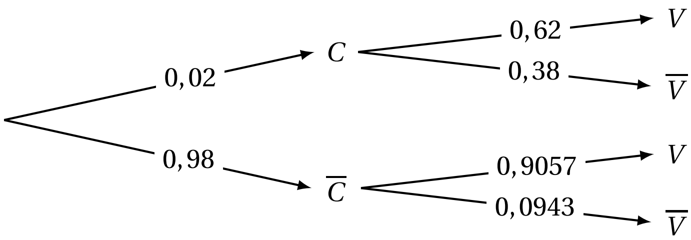
2. **a.** On a : $P(C\cap V) = P(C)\times P_C(V) = 0,02\times 0,62 = 0,0124$.

   b. Les évènements C et $\overline{C}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :
   $P(V) = P(C\cap V) + P\left(\overline{C}\cap V\right) \iff P\left(\overline{C}\cap V\right) = P(V) - P(C\cap V)$
   On a donc : $P\left(\overline{C}\cap V\right) = P(V) - P(C\cap V) = 0,9 - 0,0124 = 0,8876$

3. Pour compléter l'arbre de probabilité, il nous faut $P_{\overline{C}}(V)$.

Par définition : $P_{\overline{C}}(V) = \dfrac{P\left(\overline{C} \cap V\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,8876}{1 - P(C)} = \dfrac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$ au dix-millième près.

Et donc :



4. Par définition : $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)} = \dfrac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus.

5. **a.** « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. ».

Cette affirmation est **fausse**, car un peu exagérée, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57 % d'entre elles sont vaccinées, quand 9,43 % d'entre elles ne le sont pas, mais le décuple de 9,43 % est 94,3 %, qui est donc supérieur à 90,57 %.

Il y a $\dfrac{90,57}{9,43} \approx 9,6$ fois plus de personnes vaccinées que non vaccinées parmi les personnes non contaminées.

b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

Cette affirmation est **vraie**, car on a calculé qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus, donc, par complémentaire, cela implique qu'environ 98,62 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées. Il est donc correct de dire que c'est plus de 98 %.

6. **a.**
- On a une épreuve aléatoire à deux issues. On qualifie de succès l'évènement C, de probabilité $p = 0,02$;
- Cette épreuve est répétée $n = 20$ fois pour constituer l'échantillon de 20 personnes. La répétition étant assimilable à des tirages successifs avec remise, on peut dire que les répétitions sont identiques et indépendantes ;
- La variable aléatoire X compte le nombres de personnes contaminées, donc le nombre de succès, dans l'échantillon.

Ces trois éléments garantissent que X suit la loi binomiale, de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$.

b. La probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes est :

$P(X = 4) = \dbinom{20}{4} \times 0,02^4 \times 0,98^{20-4} = 4\,845 \times 0,02^4 \times 0,98^{16} \approx 5,6 \times 10^{-4}$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X = 4) \approx 0,0006$

EXERCICE 4 **5 points**

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

   On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $w_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

   Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n$.

   Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n$$

$$\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \textbf{B. 4}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n)\\ u_{n+1} &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question } \textbf{B. 5.}\\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big((n+1) - 2n\big)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;

- $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :
$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.