

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à 0,32. N suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(15; 0,32)$.

2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4} \approx 0,206 \text{ au millième près.}$$

3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :

$$P(N \leq 6) = P(N = 0) + P(N = 1) + \dots + P(N = 6) \approx 0,828 \text{ (calculatrice).}$$

4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.

Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5. a. Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.

b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit

$$E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4, \text{ donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.}$$

c. On a $P(12 \leq T = 3N \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6)$.

Cette probabilité est égale à :

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167, \text{ soit}$$

$$P(12 \leq T \leq 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b. • Chaque variable X_1, \dots, X_{50} suit la même loi que X donc on a :

$$E(M_{50}) = E(X) = 22;$$

• Comme les variables X_1, X_2, \dots, X_{50} sont indépendantes, on en déduit :

$$V(M_{50}) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{65}{50} = \frac{130}{100} = 1,3.$$

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, pour tout réel $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$\text{donc ici : } P(|M_{50} - E(M_{50})| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2}$$

$$\text{Comme } \frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}, \text{ on a bien : } P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}.$$

d. L'événement « $19 < M_{50} < 25$ » revient à $|M_{50} - 22| < 3$ et

$$P(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3).$$

Soit $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$ entraîne $P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856$:
cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2. D'après la loi faible des grands nombres, $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$,
donc en particulier ici, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 22| \geq 3) = 0$.

donc pour tout $r > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $P(|M_n - 22| \geq 3) < r$ et c'est vrai en particulier pour $r = 0,01$.

L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :

Pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2 n}$$

Pour $t = 3$ on obtient : $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{n \times 3^2}$.

$$\begin{aligned} \text{On veut donc que : } \frac{65}{9n} \leq 0,01 &\iff \frac{6500}{9} \leq n \\ &\iff 722 + \frac{2}{9} \leq n \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geq 723$.

EXERCICE 2

5 points

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. a. $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
 $u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.
- b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.
2. a. Posons, pour tout entier naturel n , l'affirmation P_n : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leq u_1 \leq u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
 $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \implies \sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$
car la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+
 $\implies 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n , la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- b.** D'après la question précédente, pour tout entier n , $1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Et pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geq 1$.

- c.** Soit $x \in [0; +\infty[$:
- $$\sqrt{x} = x \iff x = x^2 \text{ car } x \geq 0$$
- $$\iff x^2 - x = 0$$
- $$\iff x(x - 1) = 0$$
- $$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0; +\infty[$: 0 et 1.

- d.** La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0; +\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geq 1$ donc $\ell = 1$.

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Partie B

- 1. a.** Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$
- $$= \ln(\sqrt{u_n})$$
- $$= \frac{1}{2} \ln(u_n)$$
- $$= \frac{1}{2} v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

- b.** On a donc, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}$.

- c.** Or, pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(u_n)$ donc $\frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

- 2. a.** À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1,01$ et $u_7 \approx 1,00543$ donc $k = 7$.

- b.** On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99; 1,01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$.

- c.** D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0,00543$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```

from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L =2**n *(a-1)
return L

```

EXERCICE 3

5 points

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DH} + 2 \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{DM} + 2 \overrightarrow{BI} + -\overrightarrow{CB}
 \end{aligned}$$

Affirmation 2 : Fausse

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

On peut exprimer \overrightarrow{AG} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} : les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK} \quad \text{car } \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK} \\
 &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} \quad \text{car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)} \\
 &= -\overrightarrow{IB} \times \overrightarrow{IA} \quad \text{car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire} \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]} \\
 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc un

vecteur normal au plan \mathcal{P} .

On est dans un repère orthonormé donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan \mathcal{P} et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie**Méthode 1 :**

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan \mathcal{P}' .

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' est donc de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point B appartient au plan \mathcal{P}' donc $2x_B - y_B + 3z_B + d = 0$

D'où $2 \times 5 + 3 + 3 \times 7 + d = 0$ donc $10 + 3 + 21 + d = 0$ ce qui équivaut à $d = -34$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' est donc : $2x - y + 3z - 34 = 0$.

En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan \mathcal{P}' a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$, le vecteur $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est donc

un vecteur normal au plan \mathcal{P}' .

$\vec{n}' = -\vec{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.

Vérifions si le point B appartient au plan \mathcal{P}' .

$$-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2 \times 5 - 3 - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$$

Donc le point B appartient au plan \mathcal{P}' .

Donc le plan \mathcal{P}' parallèle à \mathcal{P} passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P} .

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point A sur la plan \mathcal{P} , c'est donc l'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite Δ orthogonale au plan \mathcal{P} passant par le point A.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ .

De plus le point A(2 ; 0 ; -1) appartient à la droite Δ , une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan \mathcal{P} donne l'équation en la variable t :

$$2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0$$

$$\iff 14t = -7$$

$$\iff t = -\frac{1}{2}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et \mathcal{P} est le point de paramètre $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ .

Il a comme coordonnées : $H \left(2 - 2 \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1 - 3 \times \frac{1}{2} \right)$ soit $H \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{2} \end{pmatrix}$$

d'où : $\|\overrightarrow{AH}\|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}$, donc $\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par \overrightarrow{AB} donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 0 - 3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -12 + 2k \\ t = -2 \\ -17 = 3 - 5k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t = -2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k = 4$ de (d) c'est à dire le point C(-4 ; 6 ; -17).

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

EXERCICE 4

5 points

PARTIE A

1. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$:

$$f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)).$$

- b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$

On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $\cos(0) = 1$, et d'autre part, $\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos(x) + \sin(x) > 0.$$

D'autre part, pour tout réel x , $e^x > 0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. L'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est :
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$.

$$f(0) = e^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0; \text{ (donné dans l'énoncé)}$$

$$f'(0) = e^0 (\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0 + 1) = 1 \text{ (donné dans l'énoncé)}$$

L'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est donc
 $y = 1x + 0$ soit $y = x$.

- b. En anticipant la question 3., on va étudier la convexité de la fonction sur $[0; \pi]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$:

$$f''(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

$$= e^x (\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$$

$$= 2e^x \cos(x)$$

On a le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
signe de $f''(x)$	+	0	-

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).

On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. $x \mapsto e^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = e^x & \text{et} & u'(x) = e^x \\ v'(x) = \sin(x) & \text{et} & v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I &= \left[-\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\cos(x)) dx \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)e^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= 0 + 1 + J \\ &= 1 + J \end{aligned}$$

$$x \longmapsto e^x \sin(x) \text{ est de la forme } uv' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \sin(x) & \text{et } u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & \text{et } v(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I &= \left[\sin(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0)e^0 - J \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + e^{\frac{\pi}{2}} - J$.

$$\text{d'où } I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$e^x \sin(x) \geq x \text{ c'est à dire } f(x) \geq g(x).$$

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) dx$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 0 \\ &= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{L'aire cherchée est donc } \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ u.a. } (\approx 1,67 \text{ u. a.})$$

