

∞ Corrigé du baccalauréat Asie ∞

**Sujet 2 – 12 juin 2025**

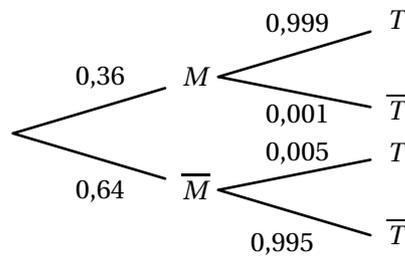
**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Partie A : Étude d'un exemple**

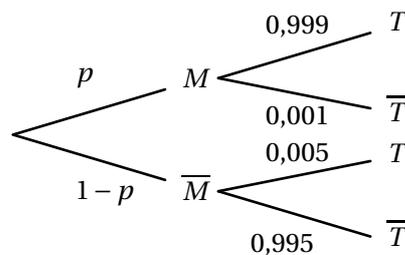
- D'après l'énoncé :  $P_M(T) = 0,999$  et  $P_{\bar{M}}(T) = 0,005$
- 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc  $P(M) = \frac{270\,000}{750\,000} = 0,36$
- Voici l'arbre pondéré complété :



- $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,35964$   
donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est 0,36 à  $10^{-3}$  près.
- $M$  et  $\bar{M}$  constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :  
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005 = 0,35964 + 0,0032 = 0,36284$   
donc la probabilité que l'individu ait un test positif est 0,363 à  $10^{-3}$  près.
- $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,35964}{0,36284} \approx 0,991$
- Puisque  $P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$ , le test est considéré comme fiable.

**Partie B : Dépistage sur une population cible**

- Voici l'arbre pondéré complété :



- $M$  et  $\bar{M}$  constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :  
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = p \times 0,999 + (1 - p) \times 0,005 = 0,999p + 0,005 - 0,005p = 0,994p + 0,005$

$$3. P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005}$$

4. Le test est fiable si  $P_T(M) > 0,95$  :

$$\frac{0,999p}{0,994p + 0,005} > 0,95 \iff 0,999p > 0,95(0,994p + 0,005) \iff 0,999p > 0,9443p + 0,00475 \iff 0,0547p > 0,00475 \iff p > \frac{0,00475}{0,0547} \approx 0,087 \text{ donc, le test est fiable si } p > 0,087 \text{ (soit 8,7\%).}$$

### Partie C : Étude sur un échantillon

$X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,36$ .

On cherche le plus petit  $n$  tel que  $P(X \geq 1) > 0,99$

$$P(X \geq 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff -P(X = 0) > -0,01 \iff P(X = 0) < 0,01$$

or  $P(X = 0) = (1 - 0,36)^n = 0,64^n$  donc  $P(X \geq 1) > 0,99 \iff 0,64^n < 0,01 \iff \ln(0,64^n) < \ln(0,01)$  car la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0, +\infty[$

$$\iff n \ln(0,64) < \ln(0,01) \iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \text{ car } \ln(0,64) < 0 \text{ or } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$$

donc Il faut interroger au moins 11 individus pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit atteint dépasse 99 %.

### EXERCICE 2

5 points

#### Partie A

$$1. u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25 \text{ et } u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = 22,5.$$

$$2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$ .

$$3. \text{ Pour tout entier } n, v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$4. \text{ Pour tout entier } n, u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ ( } q^n \text{, avec } 0 < q < 1 \text{ ) donc par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ et donc par somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$$

#### Partie B

$$1. w_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = 44,5$$

2. La fonction Python donnée ne calcule pas correctement  $w_1$  car elle calcule  $u_1$  avant de calculer  $w_1$  il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        W = W/2 + U/2 + 7
        U = U/2 + 10
    return W
```

3. (a)

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $w_0 = 45$  et  $10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$   
donc l'égalité est vraie pour  $n = 0$ .

**Hérédité :**  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$ .

Alors  $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 = \frac{1}{2} \left[ 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right] + \frac{1}{2} \left[ 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 7$   
donc  $w_{n+1} = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 = 10(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

donc l'égalité est vraie au rang  $n+1$ .

**Conclusion :** l'égalité est vraie pour  $n = 0$  elle l'est aussi au rang  $n+1$  donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier  $n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$  et pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$  donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  ( $q^n$  avec  $0 < q < 1$  donc par produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 34$

### EXERCICE 3

#### 5 points Affirmation 1 :

D'après la représentation paramétrique donnée le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur direc-

teur de  $(d)$  et d'après l'équation cartésienne de  $P$ ,  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $P$ .

$\vec{n} = 6 \vec{u}$  donc les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires donc  $(d)$  est orthogonale à  $P$ .

$2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2 \times (-6) + 3 \times 2 + 6 \times 2 - 6 = 0$  donc  $H \in P$  donc **l'affirmation 1 est vraie.**

**Affirmation 2 :**

$$\vec{CH} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{CH} \cdot \vec{CD} = -9 \times (-3) + 2 \times 2 + 2 \times 0 = 31$$

Or par définition  $\vec{CH} \cdot \vec{CD} = \|\vec{CH}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos(\widehat{DCH})$

On a  $\|\vec{CH}\| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89}$  et  $\|\vec{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$

$$\text{donc } \cos(\widehat{DCH}) = \frac{\vec{CH} \cdot \vec{CD}}{\|\vec{CH}\| \times \|\vec{CD}\|} = \frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}$$

donc l'angle  $\widehat{DCH}$  mesure  $\arccos\left(\frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}\right) \approx 24,3^\circ$  donc **l'affirmation 2 est fausse.**

**Affirmation 3 :**  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $P$ ;  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $P'$ .

Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires donc les plan  $P$  et  $P'$  ne sont pas parallèles et sont donc sécants, leur intersection est une droite.

$A(3; 0; 0) \in \Delta$  (obtenu avec  $t = 0$ )

$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 6 \times 0 - 6 = 0$  donc  $A \in P$  et  $x_A - 2y_A + 3z_A - 3 = 3 - 2 \times 0 + 3 \times 0 - 3 = 0$  donc  $A \in P'$

Donc l'intersection des plans  $P$  et  $P'$  est une droite contenant  $A$ . Pour déterminer si cette droite est  $\Delta$ , soit on prend un autre point, soit on montre qu'un vecteur directeur de  $\Delta$  est orthogonal à  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ .

$B(0; 0; 1) \in \Delta$  (obtenu avec  $t = 1$ )

$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 6 = 0$  donc  $B \in P$  et  $x_B - 2y_B + 3z_B - 3 = 0 - 2 \times 0 + 3 \times 1 - 3 = 0$  donc  $B \in P'$  donc **l'affirmation 3 est vraie.**

**Affirmation 4 :**  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc une représentation paramétrique de la droite  $(CD)$  est

représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = 3 - 3s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

pour  $s = \frac{31}{13}$  on retrouve les coordonnées de  $J$  donc  $J \in (CD)$ .

de plus  $\overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{24}{13} \times (-3) + \frac{36}{13} \times 2 + (-2) \times 0 = 0$

donc les vecteurs  $\overrightarrow{HJ}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont orthogonaux donc  $J$  est bien le projeté orthogonal de  $H$  sur  $(CD)$  donc **l'affirmation 4 est vraie.**

#### EXERCICE 4

5 points

##### Partie A

1. Par lecture graphique : La température initiale est  $f(0) = 40$  et on observe que la température redescend à cette valeur pour  $t \approx 3,8$  minutes.

2.  $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$  donc  $f(0) = (a \times 0 + b) \times e^0 = b$  or  $f(0) = 40$  donc  $b = 40$ .

3.  $f$  est dérivable sur  $[0; 10]$  comme produit de fonctions dérivables.

$f = uv$  avec  $u(t) = at + b$  et  $v(t) = e^{-0,5t}$  donc  $f' = u'v + v'u$  avec  $u'(t) = a$  et  $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$

donc pour tout  $t \in [0; 10]$ ,  $f'(t) = ae^{-0,5t} + (at + 40) \times (-0,5e^{-0,5t}) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$

donc pour tout  $t \in [0; 10]$ ,  $f'(t) + 0,5f(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t} + 0,5(at + 40)e^{-0,5t} = ae^{-0,5t}$

$f$  est solution de l'équation différentielle (E) donc  $ae^{-0,5t} = 60e^{-0,5t} \Rightarrow a = 60$ .

##### Partie B

1. Pour tout  $t \in [0; 10]$ ,  $f'(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$  avec  $a = 60$  on obtient  $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$

2. a. Pour tout  $t \in [0; 10]$ ,  $e^{-0,5t} > 0$  donc  $f'(t)$  a le même signe que  $40 - 30t$ .

$40 - 30t \geq 0 \iff -30t \geq -40 \iff t \leq \frac{4}{3}$  On en déduit le tableau de signes de  $f'(t)$  et le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 10]$

$y$	0	$\frac{4}{3}$	10
Signes de $f'(t)$	+	0	-
Variations de $f$	40	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$640e^{-5}$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60 \times \frac{4}{3} + 40\right) e^{-0,5 \times \frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6; f(0) = 40 \text{ et } f(10) = 640e^{-5} \approx 4,31$$

b. Sur  $\left]0; \frac{4}{3}\right]$ ,  $f(t) > 40$  donc l'équation  $f(t) = 40$  n'a pas de solution.

$\left[\frac{4}{3}; 10\right]$  : d'après les valeurs approchées calculées dans la question précédente,  $f\left(\frac{4}{3}\right) > 40$  et  $f(10) < 40$  donc  $40 \in \left[\frac{4}{3}; 10\right]$

de plus  $f$  est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(t) = 40$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$

donc l'équation  $f(t) = 40$  admet une unique solution  $\alpha$  strictement positive sur  $[0; 10]$

sur  $[0; 10]$

c. À l'aide de la calculatrice on trouve  $\alpha \approx 3,8$

Interprétation : La température revient à sa valeur initiale de  $40^\circ\text{C}$  après environ 3,8 minutes.

3. a.  $\int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 (60t + 40)e^{-0,5t} dt.$

On pose  $u(t) = 60t + 40$  et  $v'(t) = e^{-0,5t}$  alors  $u'(t) = 60$  et  $v(t) = -2e^{-0,5t}$ .

les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues donc d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^4 (60t + 40)e^{-0,5t} dt = [(60t + 40)(-2e^{-0,5t})]_0^4 - \int_0^4 -2 \times 60e^{-0,5t} dt = [(-120t - 80)e^{-0,5t}]_0^4 +$$

$$120 \int_0^4 e^{-0,5t} dt$$

$$= -560e^{-2} + 80 + 120[-2e^{-0,5t}]_0^4 = -560e^{-2} + 80 + 120(-2e^{-2} + 2) = -560e^{-2} + 80 - 240e^{-2} + 240$$

$$= 320 - 800e^{-2} = 320 - \frac{800}{e^2}$$

b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$$\frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(320 - \frac{800}{e^2}\right) = 80 - \frac{200}{e^2} \approx 52,9$$

Donc la température moyenne est environ  $53^\circ\text{C}$  sur les 4 premières minutes.