Corrigé du baccalauréat Centres étrangers

Sujet 2 – 13 juin 2025

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 6 points

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.
3. La raison q vérifiant $q \in]-1\ ;\ 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.

   En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.

   Il y aura donc 4 800 individus au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.

   $f'(x) \geqslant 0 \iff -0,1x + 1,1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1,1}{0,1} \iff x \leqslant 11$.

   Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 11]$.

3. Nous savons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

   - **Initialisation :** $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang 0.
   - **Hérédité :** on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

     Comme $v_n \in [0\ ;\ 11]$, $v_{n+1} \in [0\ ;\ 11]$, et que f est croissante sur $[0\ ;\ 11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit

     $f(2) \leqslant f[v_{n+1}] \leqslant f[v_n] \leqslant f(6) \iff 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n_1} \leqslant 4,8$.

     On a donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :** La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n,

     $$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n,

   - $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante ;
   - $2 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 2$.

5. **a.** La fonction f est continue, $(f([2\,;\,6]) \subset [2\,;\,6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2\,;\,6]$ de l'équation $f(x) = x$.

b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:

$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$

On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2\,;\,6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

Partie C

1. En milieu A, on utilise la suite (u_n). On cherche à résoudre $u_n < 3$.

$u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \dfrac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $0,93^n < \dfrac{1}{2} \iff \ln(0,93^n) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0,93) < -\ln(2)$

$\iff n > -\dfrac{\ln(2)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$.

Or $-\dfrac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$ donc $n \geqslant 10$ soit en 2035.

À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3 000.

2. On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3,14$ et

$v_6 \approx 2,96$. Donc pour $n \geqslant 6$.

Ce sera donc à partir de 2031.

3. La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.

4. Le script complété :

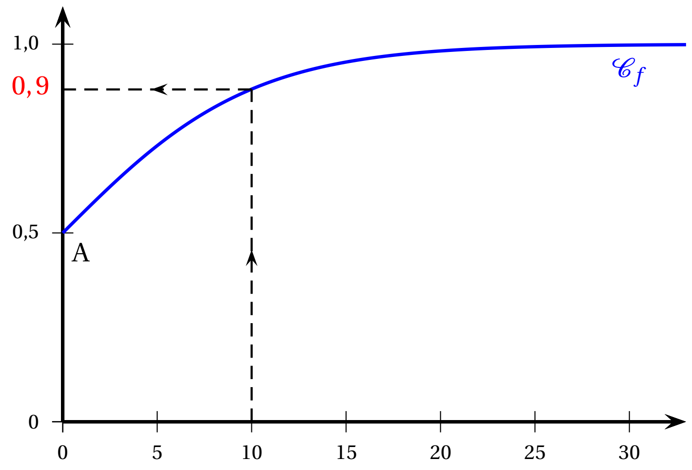
```
n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v= -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```

5. Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$. Donc $N = 13$.

Exercice 2 6 points

Partie A

1. 1970 - 1960 = 10. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

2. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

3. $f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{2} \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0,5}{10} = 0,05$.

5. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$ Donc en posant $u(t) = a + \mathrm{e}^{-bt}$, $u'(t) = -b\mathrm{e}^{-bt}$

Donc $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{-b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2} = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bt}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bt}\right)^2}$.

b. Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\dfrac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, de la forme $\dfrac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$.

Donc en posant $u(t) = 1+\mathrm{e}^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$, $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$.

$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

Or $0,97 \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17\ ;\ 18[$.

Partie C

1. $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{0,2t}$, on obtient : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}(1+\mathrm{e}^{-0,2t})} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{\mathrm{e}^{0,2t}+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$.

2. f est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t) = \mathrm{e}^{0,2t}$ et $u'(t) = 0,2\mathrm{e}^{0,2t}$.

En écrivant $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}} = \dfrac{1}{0,2} \times \dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}} = 5 \times \dfrac{0,2\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$,

on détermine la fonction F, une primitive de f : $F(t) = 5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)$ pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

3. $I = \dfrac{1}{40}\displaystyle\int_0^{40} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{40}\displaystyle\int_0^{40} \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{40}\left[5\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2t}\right)\right]_0^{40} =$

$\dfrac{5}{40}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right) - \ln(2)\right)$

$= \dfrac{1}{8}\left(\ln\left(\mathrm{e}^8+1\right) - \ln(2)\right) = \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^8+1}{2}\right) \approx 0,913$

Exercice 3 — 4 points

Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter

$\mathrm{card}(\Omega) = 16\,777\,216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\dfrac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.

3. **a.** On reprend la question **1.** avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.

   b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».
   Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».
   Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$.
   Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.

   c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.

   d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.

2. $P(X = 0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1 - 0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.

3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geqslant 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

Partie C

En utilisant les propriétés sur la linéarité de l'espérance et de la variance (les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 étant indépendantes), on peut affirmer que :
$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times E(X) =$
$4 \times n \times p = 4 \times 250 \times 0,01 = 10$.
Il en est de même pour la variance :
$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 4 \times V(X) = 4 \times n \times p \times (1-p) =$
$4 \times 250 \times 0,01 \times 0,99 = 9,9$.

Exercice 4 — 4 points

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-3}{-1} \neq \dfrac{1}{3}$.
   Les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC). Avec $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, on calcule $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC}$:
   $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$. $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc il est normal à ce plan (ABC).

c. $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan (ABC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $-x+y+4z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
$A(1\,;\,0\,;\,3) \in (ABC)$ donc $-1+0+12+d=0 \iff d=-11$.
Donc $(ABC) : -x+y+4x-11=0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}'$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{-1}$. Donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d).

b. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 3+3-2=4 \neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

3. Soit une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Vérifions si $\overrightarrow{u}$ est normal aux vecteurs normaux des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.
$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{u} = 3-3+0=0$ et $\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{u} = 1-1+0=0$ donc cette droite est parallèle à la fois au plan $\mathscr{P}$ et au plan $\mathscr{P}'$. Donc il existe une droite (d_1) appartenant à $\mathscr{P}$ et une droite (d_1) appartenant à $\mathscr{P}'$ qui sont parallèles de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Citons le théorème du toit : s'il existe deux droites parallèles (d_1) et (d_2), contenues respectivement dans deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors la droite, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est parallèle à (d_1) et (d_2).

Donc (d) est parallèle à cette droite. Un vecteur directeur de (d) est donc $\overrightarrow{n}$.

4. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

- $6-3+6-9=12-12=0$ donc $M \in \mathscr{P}$;
- $2-1-3+2=4-4=0$ donc $M \in \mathscr{P}'$.

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur (d) : $\overrightarrow{u}$ donc

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=3 \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}$$

5. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d). On résout le système :

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=3 \\ -x+y+4z-11=0 \end{cases}$$

. S'il admet une infinité de solutions alors $(d) \subset (ABC)$.

On remplace x, y et z dans la dernière équation :

$-x+y+4z-11=0 \Rightarrow -(2+t)+1+t+4\times 3-11=0 \iff 0=0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t. Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d) \subset (ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Reprenons les trois vecteurs normaux des trois plans : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n_1}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec $\mathscr{P}$ ni avec $\mathscr{P}'$. Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d).