

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

6 points

A. P. M. E. P.

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ .
5.
 - a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ .
 - b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

- a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
- b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

Exercice 2

6 points

On s'intéresse à l'évolution du taux d'équipement en réfrigérateurs d'une population donnée, c'est-à-dire à la proportion de cette population qui possède au moins un réfrigérateur.

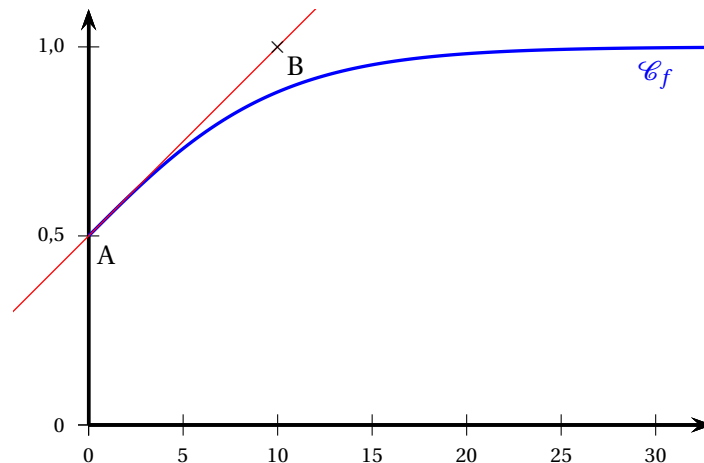
Partie A

On admet que le taux d'équipement en réfrigérateurs est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{a + e^{-bt}}$$

où t représente le temps écoulé, en années, depuis 1960, et a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$.

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du taux d'équipement en réfrigérateurs en 1970.
2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(t)$ en fonction de t et de la constante b .
 - b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$$

1. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

Dans cette partie, on cherche à calculer la moyenne du taux d'équipement en réfrigérateurs entre 1960 et 2000.

1. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millièm.

Exercice 3**4 points**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .

Exercice 4**4 points**

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
 - c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2.
 - a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
 - b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d) .
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?